NGUYỄN NGỌC KHOA

PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM HÌNH HỌC 11

CHƯƠNG TRÌNH NÂNG CAO

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NGUYỄN NGỌC KHOA
GV. TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ KHIẾT

PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

HÌNH HỌC 11

CHƯƠNG TRÌNH NÂNG CAO

- TÓM TẮT LÍ THUYẾT
- CÁC DẠNG TOÁN CƠ BẢN
- CÁC ĐỀ TRẮC NGHIỆM VÀ LỜI GIẢI

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

LỜI NÓI ĐẦU

Quyển sách "**PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM HÌNH HỌC LỚP 11**" được biên soạn trên tinh thần hệ thống tất cả các dạng toán trong SGK, nhằm giúp học sinh tự ôn tập, tự kiểm tra đánh giá, đồng thời qua đó giúp các em hoàn thiện các kiến thức toán cơ bản, nâng cao kĩ năng giải toán

Nội dung quyển sách được trình bày thành các chương :

- *Chương I:* Phép dời hình và phép đồng dạng trong mặt phẳng
- *Chương II:* Đường thẳng và mặt phẳng trong không gian. Quan hệ song song
- *Chương III:* Vectơ trong không gian- Quan hệ vuông góc

Mỗi chương được chia thành các bài tương ứng với SGK, mỗi bài có các mục: tóm tắt lí tuyết, các dạng toán cơ bản, các đề trắc nghiệm và lời giải

Trong phần các dạng toán cơ bản, tác giả nêu phương pháp giải từng dạng toán, có ví dụ minh hoạ, nhằm giúp các HS củng cố, khắc sâu lí thuyết, hoàn thiện, nâng cao các kĩ năng giải toán

Mỗi bài có các đề trắc nghiệm, các em học sinh nên cố gắng tự giải trước khi đọc lời giải trong sách để đối chiếu, so sánh

Tác giả hy vọng quyển sách này sẽ là một tài liệu tham khảo và ôn tập thiết thực, giúp các em học sinh củng cố, khắc sâu lí thuyết, hoàn thiện và nâng cao kĩ năng giải toán

Dù đã cố gắng rất nhiều, nhưng chắc chắn nội dung quyển sách không tránh khỏi những thiếu sót. Rất mong nhận được sự góp ý chân thành của bạn đọc gần xa, để quyển sách ngày càng được hoàn thiện. Tác giả chân thành cảm ơn

TÁC GIẢ

Chương I
PHÉP DỜI HÌNH VÀ PHÉP ĐỒNG DẠNG

§1. PHÉP DỜI HÌNH

TÓM TẮT LÍ THUYẾT

I. Php biến hình: Qui tắc tương ứng mỗi điểm M của mặt phẳng với một điểm xác đih duy nhất M' của mặt phẳng đó được gọi là phép biến hình.

Tathường kí hiệu phép biến hình bằng F và viết F(M) = M', khi đó M' được gọi là ảnlcủa M qua F

Nu **H** là một hình, ta ký hiệu **H'** = F(**H**) là tập các điểm M' = F(M) với mọi M thuộc**H**, ta nói **H'** là ảnh của hình **H** qua F

Php biến hình F biến mọi điểm M thành chính nó được gọi là phép đồng nhất

II. Pép dời hình: Phép dời hình là một phép biến hình không làm thay đổi khoảng cách giữa hai điểm bất kì

Nế F là phép dời hình thì với mọi điểm M, N

(M) = M', F(N) = N' thì MN = M'N'

III. Tih chất của phép dời hình:

Địh lí: Phép dời hình biến ba điểm thẳng hàng thành 3 điểm thẳng hàng, ba điểm hông thẳng hàng thành ba điểm không thẳng hàng

Hệquả: Phép dời hình biến đường thẳng thành đường thẳng, tia thành tia, đoạn thẳng ành đoạn thẳng bằng nó, biến tam giác thành tam giác bằng nó, biến đường tròn thnh đường tròn bằng nó, biến góc thành góc bằng nó

CÁC ẠNG TOÁN CƠ BẢN

I. Dạn 1: Chứng minh phép biến hình F là một phép dời hình:

Phưng pháp: Lấy 2 điểm bất kì A, B. Gọi A' = F(A), B' = F(B). Hãy chứng minh A'B' = AB

VD1 : rong mặt phẳng Oxy xét phép biến hình F biến M(x; y) thành M'(x − 3; y + 1). Hãychứng minh F là phép dời hình

Giải

Lấyhai điểm $A(x_A; y_A)$; $B(x_B; y_B)$. Gọi A' = F(A), B' = F(B), ta có

$A'(x_A - 3; y_A + 1)$, $B'(x_B - 3; y_B + 1)$

$A'B'^2 = [(x_A - 3) - (x_B - 3)]^2 + [(y_A + 1) - (y_B + 1)]^2$

$= (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 = AB^2$

$\Rightarrow A'B' = AB$

Vậy F là phép dời hình

VD2: Chứng minh phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$ là một phép dời hình

Giải

Phép tịnh tiến T theo vectơ $\vec{u}$ là một phép dời hình

Thật vậy, giả sử $T(A) = A_1$, $T(B) = B_1$, ta có:

$$\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BB_1} = \vec{u} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1} \Rightarrow AB = A_1B_1$$

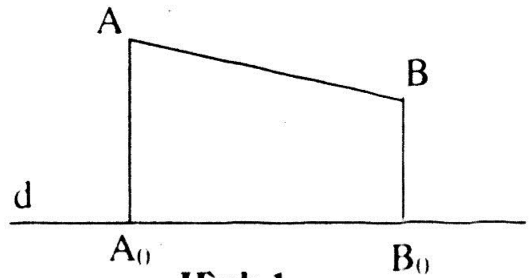
Vậy T là phép dời hình

II. Dạng 2: Chứng minh phép biến hình F không phải là phép dời hình

Phương pháp: Chỉ ra hai điểm A, B thoả mãn $F(A)F(B) \neq AB$

VD1: Chứng minh phép chiếu vuông góc lên đường thẳng không là phép dời hình

Giải



Hình 1

Xét phép chiếu lên đường thẳng d,

Lấy 2 điểm phân biệt A, B sao cho AB không song song hoặc trùng với d. Gọi A_0, B_0 là hình chiếu vuông góc của A, B lên d (xem Hình 1)

Dễ dàng thấy rằng $AB > A_0B_0$.

Vì vậy phép chiếu lên đường thẳng không phải là phép dời hình

VD2: Trong mặt phẳng Oxy xét phép biến hình F biến $M(x; y)$ thành $M'(2x; y)$. Hãy chứng minh F không là phép dời hình

Giải

Lấy $O(0; 0)$, $A(1; 0)$. Gọi $O' = F(O)$, $A' = F(A)$, ta có: $O'(0; 0)$, $A'(2; 0)$

$OA = 1$; $O'A' = 2$. $OA \neq O'A'$ nên F không phải là phép dời hình

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai?

(A) Phép chiếu lên đường thẳng là một phép dời hình đúng, sai

(B) Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$ là một phép dời hình đúng, sai

(C) Phép lấy đối xứng qua một đường thẳng là một phép dời hình đúng, sai

Câu 2: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai?

(A) Phép dời hình biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng đúng, sai

(B) Có phép dời hình biến hình chữ nhật (không phải là hình vuông) thành hình vuông đúng, sai

(C) Phép dời hình biến tam giác thành một tam giác bằng nó đúng, sai

Câu 3: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, xét các phép biến hình sau đây

Phép biến hình F_1 biến $M(x; y)$ thành $M'(y; -x)$

Phép biến hình F_2 biến $M(x; y)$ thành điểm $M_1(2x; y)$

Trong các khẳng định sau đây, khẳng định nào đúng?

(A) F_1, F_2 là hai phép dời hình

(B) F_1 là phép dời hình và F_2 không phải là phép dời hình

(C) F_1 không là phép dời hình và F_2 là phép dời hình

(D) F_1 không là phép dời hình và F_2 không là phép dời hình

Câu 4: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy xét các phép biến hình sau

Phép biến hình F_1 biến điểm M(x; y) thành điểm $M'(y; x)$

Phép biến hình F_2 biến điểm M (x; y) thành điểm $M_1(-x; y)$

Phép biến hình F_3 biến điểm M(x; y) thành điểm $M_2(2x; 2y)$

Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai ?

(A) F_1 là phép dời hình đúng, sai

(B) F_2 là phép dời hình đúng, sai

(C) F_3 không là phép dời hình đúng, sai

Câu 5: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy xét phép biến hình F biến M(x; y) thành $M'(mx; my)$. F là phép dời hình khi và chỉ khi giá trị của m bằng

(A) ±2 **(B)** −1 **(C)** −2 **(D)** ±1

Câu 6: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy xét phép biến hình F biến M(x; y) thành $M'(2x; my)$. Với giá trị nào của m thì F là phép dời hình?

(A) m = 2 **(B)** m = −2

(C) m = 1 **(D)** không có giá trị nào của m

Câu 7: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy xét phép biến hình F biến M(x; y) thành $M'(\frac{1}{2}x; my)$. Với giá trị nào của m thì F là phép dời hình?

(A) m = 2 **(B)** m = −2

(C) m = 1 **(D)** không có giá trị nào của m

Câu 8: Cho hai điểm phân biệt A, B và I trung điểm của AB. Gọi F là phép dời hình thoả mãn F(A) = B, F(B) = A. Chọn khẳng định đúng

(A) F(I) = A **(B)** F(I) = B

(C) F(I) = I **(D)** Các khẳng định ở (A), (B), (C) đều sai

Câu 9: Gọi F là một phép dời hình biến tam giác vuông ABC thành tam giác $A_1B_1C_1$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai?

(A) Tam giác ABC và tam giác $A_1B_1C_1$ bằng nhau đúng, sai

(B) F biến trọng tâm tam giác ABC thành trọng tâm tam giác $A_1B_1C_1$

đúng, sai

(C) F biến trực tâm tam giác ABC thành trọng tâm tam giác $A_1B_1C_1$

đúng, sai

Câu 10: Cho hai điểm phân biệt A, B và F là một phép dời hình, biết F(A) = A F(B) = B. Giả sử N thuộc đường thẳng AB, N không trùng với A, B và F(N) = M Chọn khẳng định đúng

(A) M ≡ A **(B)** M ≡ B

(C) M ≡ N **(D)** Các khẳng định ở (A), (B), (C) đều sai

Câu 11: Cho hai điểm phân biệt A, B và phép dời hình F thoả mãn F(A) = A, F(B) = B. Gọi C là điểm không thuộc đường thẳng AB. Biết F(C) và C nằm cùng phía đối với AB. Với mọi điểm M bất kì, chọn khẳng định đúng:

(A) F(M) và M đối xứng nhau qua AB

(B) F(M) và M đối xứng qua BC

(C) F(M) = M với mọi M

(D) F(M) = A

Câu 12: Cho hai điểm phân biệt A, B và phép dời hình F thoả mãn F(A) = A, F(B) = B. Gọi C là điểm không thuộc đường thẳng AB. Biết F(C) ≠ C. Với mọi điểm M bất kì, chọn khẳng định đúng:

(A) F(M) và M đối xứng nhau qua AB

(B) F(M) và M đối xứng qua BC

(C) F(M) = M với mọi M

(D) F(M) = A

Câu 13: Cho đoạn thẳng AB và điểm M thoả mãn $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB}$. Gọi F là phép dời hình.

Giả sử $\overrightarrow{F(B)F(A)} = x\overrightarrow{F(M)F(B)}$. Giá trị của x bằng bao nhiêu ?

(A) x = 1 **(B)** x = 2 **(C)** x = 3 **(D)** x = –1

Câu 14: Cho tam giác ABC và điểm M thoả mãn $\overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{CM}$. F là phép dời hình. Gọi F(A) = A_1, F(B) = B_1, F(C) = C_1, F(M) = M_1

Biết AB = 4; BC = 5; CA = 6. Độ dài đoạn thẳng A_1M_1 bằng bao nhiêu?

(A) $\sqrt{106}$ **(B)** 72 **(C)** 50 **(D)** 116

TRẢ LỜI

Câu 1:

(A) Phép chiếu lên đường thẳng không phải là phép dời hình

(B) Phép tịnh tiến T theo vectơ $\vec{u}$ là một phép dời hình

(C) Phép lấy đối xứng qua đường thẳng là một phép dời hình

Câu 2:

(A) Khẳng định đúng

(B) Khẳng định sai. Vì phép dời hình không làm thay đổi khoảng cách gữa hai điểm bất kì

(C) Khẳng định đúng

Câu 3: Gọi $A(a_1; a_2)$, $B(b_1; b_2)$

$F_1(A) = A'(a_2; -a_1)$; $F_1(B) = B'(b_2; -b_1)$

Ta có:

$$A'B' = \sqrt{(b_2 - a_2)^2 + (-b_1 + a_1)^2} = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2} = AB$$

Vậy F_1 là phép dời hình

Gọi O(0; 0); M(1; 1)

$F_3(O) = O$; $F_3(M) = M_1(2; 1)$. Ta có:

$OM = \sqrt{2}$; $OM_1 = \sqrt{5}$

Vì $OM \neq OM_1$ nên F_3 không là phép dời hình

ĐS: (B)

Câu 4: Dễ dàng chứng minh F_1, F_2 là phép dời hình

Khẳng định ở (A) đúng, ở (B) đúng

Để chứng minh F_3 không phải là phép dời hình, ta lấy O(0; 0), A(1; 1). Ta có

$F_3(O) = O$; $F_3(A) = A_2(2; 2)$

Rõ ràng $OA \neq OA_2$ nên F_3 không phải là phép dời hình

Khẳng định ở câu (C) sai

F_1 được gọi là phép đối xứng qua đường phân giác góc phần tư thứ nhất

F_2 được gọi là phép đối xứng qua trục tung

Câu 5: Lấy O(0; 0); A(1; 1). Ta có

$F(O) = O$; $F(A) = A'(m; m)$

F là phép dời hình $\Rightarrow OA = OA' \Leftrightarrow OA^2 = OA'^2 \Leftrightarrow 2 = 2m^2 \Leftrightarrow m = \pm 1$

Thử lại ta nhận hai giá trị này của m

ĐS: D)

Câu 6: Lấy O(0; 0); A(1; 1). Ta có

$F(O) = O$; $F(A) = A'(2; m)$

F là phép dời hình $\Rightarrow OA = OA' \Leftrightarrow OA^2 = OA'^2 \Leftrightarrow 2 = m^2 + 4$ phương trình không có nghiệm m

ĐS: D)

Câu 7: Lấy O(0; 0); A(2; 2). Ta có:

$F(O) = O$; $F(A) = A'(1; 2m)$

F là phép dời hình $\Rightarrow OA^2 = OA'^2 \Leftrightarrow 8 = 1 + 4m^2 \Leftrightarrow m^2 = \dfrac{7}{4}$

Với $m^2 = \dfrac{7}{4}$. Lấy điểm B(2; 1), $F(B) = B'(1; m)$. Ta có:

$OB^2 = 5$; $OB'^2 = 1 + m^2 = 1 + \dfrac{7}{4} = \dfrac{11}{4}$

Vì $OB \neq OB'$, nên F không phải là phép dời hình

ĐS: D)

Câu 8: Gọi $F(I) = I_1$.

Vì A, I, B thẳng hàng nên B, I_1, A thẳng hàng

Lại có $AI = IB \Rightarrow BI_1 = I_1A$

Nên I_1 là trung điểm của AB, vì vậy $I_1 \equiv I$

ĐS: C)

Câu 9: Khẳng định ở câu (A), (B) đúng. Khẳng định (C) sai vì ABC không thể là tam giác đều

Câu 10: Dễ chứng minh rằng $M \equiv N$.

ĐS: (C)

Câu 11: Gọi $C_1 = F(C)$. Vì $F(A) = A, F(B) = B$ nên theo tính chất của phép dời hình ta có

$$\Delta ABC = \Delta ABC_1 \ (BC = BC_1,\ AC = AC_1)$$

Vì vậy có hai khả năng xảy ra: C và C_1 đối xứng qua AB hoặc $C \equiv C_1$

Theo giả thiết C và C_1 cùng phía so với AB vì vậy $C \equiv C_1$

Với mọi điểm M ta vẽ đường thẳng qua M cắt AB, AC tại D, E

Theo câu 10, $F(D) = D$, $F(E) = E$ và vì vậy $F(M) = M$

ĐS: (C)

Câu 12: Chứng minh như câu 11. **ĐS: (A)**

Câu 13: Để đơn giản ta đặt $F(X) = X_1$ với mọi X. Theo giả thiết

$$\overrightarrow{B_1A_1} = x\overrightarrow{M_1B_1} \Leftrightarrow -\overrightarrow{A_1B_1} = x(\overrightarrow{A_1B_1} - \overrightarrow{A_1M_1})$$

$$\Leftrightarrow (1+x)\overrightarrow{A_1B_1} = x\overrightarrow{A_1M_1}$$

Theo tính chất của phép dời hình ta có: $2\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_1M_1}$

Vì vậy ta phải có $1 + x = 2x \Leftrightarrow x = 1$

ĐS: (A)

Câu 14:

Theo tính chất của phép dời hình $AM = A_1M_1$. Ta tính AM

$$\overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{CM} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB} = 2(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$$

Bình phương vô hướng hai vế ta có:

$$AM^2 = 4AC^2 + AB^2 - 4\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AB} \qquad (*)$$

Ta có:

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$$

Bình phương vô hướng hai vế ta có:

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AB}$$

$$\Rightarrow 2\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AB} = AC^2 + AB^2 - BC^2$$

Thế vào (*) ta có

$$AM^2 = 2AC^2 - AB^2 + 2BC^2 = 72 - 16 + 50 = 106$$

ĐS: (A)

§2 PHÉP ĐỐI XỨNG TRỤC

TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Định nghĩa: Phép đối xứng qua đường thẳng a là phép biến hình biến mọi điểm M thành điểm M' đối xứng với M qua, ta kí hiệu phép đối xứng qua đường thẳng a là $Đ_a$, đường thẳng a được gọi là trục đối xứng

- $M' = Đ_a(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M'} = -\overrightarrow{M_0M}$ với M_0 là hình chiếu vuông góc của M lên a
- Biểu thức toạ độ của phép đối xứng:

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho M(x; y), gọi $M' = Đ_a(M) = (x'; y')$

+ Nếu a là trục Ox thì $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$

+ Nếu a là trục Oy thì $\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$

2. Định lí: Phép đối xứng trục là phép dời hình

3. Định nghĩa: Đường thẳng d được gọi là trục đối xứng của hình **H** nếu phép đối xứng trục $Đ_d$ biến **H** thành chính nó

CÁC DẠNG TOÁN CƠ BẢN

I. Dạng toán 1: Xác định ảnh của hình H qua phép đối xứng trục

Phương pháp: Để xác định ảnh H' của hình H qua phép đối xứng trục $Đ_a$ ta lấy điểm M bất kì và tìm tập hợp các điểm $M' = Đ_a(M)$ bằng các cách sau

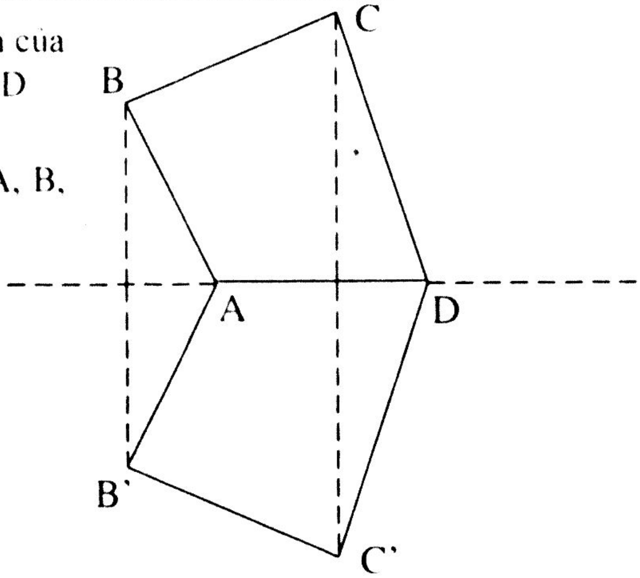
- Dùng định nghĩa
- Dùng biểu thức vectơ
- Dùng biểu thức toạ độ

VD1: Cho tứ giác ABCD. Hãy dựng ảnh của tứ giác ABCD qua phép đối xứng trục AD

Giải

(Chỉ cần xác định ảnh của các đỉnh A, B, C, D qua AD (xem Hình 2)

Ảnh là tứ giác AB'C'D



Hình 2

VD2: Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng d: $x - 2y + 2 = 0$ và đường tròn ((C): $x^2 + y^2 - 2x = 0$

a) Tìm ảnh của M(1; 0) qua phép đối xứng trục d

b) Tìm ảnh của dường thẳng d qua phép đối xứng trục Ox

c) Tìm ảnh của (C) qua phép đối xứng trục Oy

d) Tìm ảnh của (C) qua phép đối xứng trục d

Giải

a) Gọi $M'(x'; y')$ là ảnh của M qua phép đối xứng trục d

Gọi M_0 là trung điểm của MM' thì $M_0(\frac{x'+1}{2}; \frac{y'}{2})$

Đường thẳng d có vectơ pháp tuyến $\vec{n}(1; -2)$

Ta có: $\overrightarrow{MM'}$ cùng phương với $\vec{n}$ và $M_0 \in d \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x'-1}{1} = \frac{y'-0}{-2} \\ \frac{x'+1}{2} - 2\frac{y'}{2} + 2 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x' + y' = 2 \\ x' - 2y' = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -\frac{1}{5} \\ y' = \frac{12}{5} \end{cases}$$

b) M(x; y) gọi $M'(x'; y')$ là ảnh của M qua Ox ta có $\begin{cases} x = x' \\ y = -y' \end{cases}$

$M \in d \Leftrightarrow x - 2y + 2 = 0 \Leftrightarrow x' - 2(-y') + 2 = 0 \Leftrightarrow x' + 2y' + 2 = 0$

$\Leftrightarrow M'$ thuộc đường thẳng d': $x + 2y + 2 = 0$

Vậy ảnh của d qua phép đối xứng trục Ox là đường thẳng d': $x + 2y + 2 = 0$

c) N(x; y), Gọi $N'(x'; y')$ là ảnh của N qua Oy ta có $\begin{cases} x = -x' \\ y = y' \end{cases}$

$N \in (C) \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow (-x')^2 + y'^2 - 2(-x') = 0 \Leftrightarrow x'^2 + y'^2 + 2x' = 0$

$\Leftrightarrow N'$ thuộc đường tròn (C'): $x^2 + y^2 + 2x = 0$

Vậy ảnh của (C) qua phép đối xứng trục tung là đường tròn (C'): $x^2 + y^2 + 2x = 0$

d) (C) có tâm M(1; 0) và bán kính R = 1

Theo câu a, ảnh của M qua phép đối xứng trục d là điểm $M'(-\frac{1}{5}; \frac{12}{5})$

Ảnh của (C) qua phép đối xứng trục d là đường tròn (C_1) có tâm $M'(-\frac{1}{5}; \frac{12}{5})$

và bán kính $R_1 = R = 1$. Vậy (C_1): $(x + \frac{1}{5})^2 + (y - \frac{12}{5})^2 = 1$

II. Dạng toán 2: Tìm trục đối xứng của một đa giác

Phương pháp: Sử dụng tính chất: Nếu một đa giác có trục đối xứng là d thì qua phép đối xứng trục d mỗi đỉnh của đa giác phải biến thành mỗi đỉnh của nó, mỗi cạnh của đa giác phải biến thành một cạnh của đa giác và bằng cạnh ấy.

VD1: Tìm các trục đối xứng của hình chữ nhật ABCD

Giải

Giả sử AB > CD

Gọi $Đ_d$ là phép đối xứng trục d biến ABCD thành chính nó. Các trường hợp xảy ra

- AB biến thành AB
  - \+ Nếu F(A) = A => F(B) = B ⇒ AB ≡ d: điều này không thể xảy ra
  - \+ Nếu F(A) = B => F(B) = A ⇒ d là đường trung trực của AB
- AB biến thành CD
  - \+ Nếu F(A) = C, F(B) = D ⇒ AC // BD: không thể xảy ra
  - \+ Nếu F(A) = D, F(B) = C ⇒ d là đường trung trực của AD

Vậy hình chữ nhật ABCD có hai trục đối xứng

VD2: Chứng minh rằng nếu tam giác có trục đối xứng, thì trục đối xứng phải đi qua một đỉnh của tam giác, từ đó suy ra số trục đối xứng của tam giác cân, tam giác đều

Giải

Giả sử tam giác ABC có trục đối xứng là d không đi qua đỉnh nào của tam giác

Nếu $Đ_d(A) = B$ thì $Đ_d(C) = A$ hoặc $Đ_d(C) = B$

Nếu $Đ_d(A) = B$ và $Đ_d(C) = A$ thì d vừa là trung trực của AB vừa là đường trung trực của AC, điều này không thể xảy ra

Các trường hợp khác chứng minh tương tự, ta đều đi tới mâu thuẫn

Vậy nếu tam giác có trục đối xứng, thì trục đối xứng phải đi qua một đỉnh của tam giác

Từ đó suy ra tam giác cân có một trục đối xứng, tam giác đều có 3 trục đối xứng

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho đường thẳng a. Qua phép đối xứng trục $Đ_a$, những điểm nào sau đây biến thành chính nó

(A) Những điểm thuộc đường thẳng song song với a

(B) Những điểm thuộc đường thẳng a

(C) Những điểm thuộc đường thẳng vuông góc với a

(D) Những điểm thuộc đường thẳng hợp với a góc 60^0

Câu 2: Cho đường thẳng a. Qua phép đối xứng trục $Đ_a$, đường thẳng nào sau đây biến thành chính nó?

(A) Các đường thẳng song song với a

(B) Đường thẳng a

(C) Các đường thẳng hợp với a một góc 60^0

(D) Các đường thẳng hợp với a góc 45^0

Câu 3: Cho đường thẳng a. Qua phép đối xứng trục $Đ_a$, đường thẳng nào bbiến thành chính nó ?

(A) Các đường thẳng song song với a

(B) Các đường thẳng vuông góc với a

(C) Các đường thẳng hợp với a một góc 60^0

(D) Các đường thẳng hợp với a góc 30^0

Câu 4: Cho đường thẳng a. Qua phép đối xứng trục $Đ_a$ đường thẳng d biến thaành d'. Giả sử d cắt d'. Chọn khẳng định đúng

(A) d song song với a

(B) Ba đường thẳng a, d, d' đồng qui

(C) d' song song với a

(D) a, d, d' song song từng đôi

Câu 5: Cho đường thẳng a. Qua phép đối xứng trục $Đ_a$ đường thẳng d biến thaành d'. Với điều kiện nào thì d vuông góc với d'

(A) d song song a

(B) d vuông góc với a

(C) d hợp với a một góc 45^0

(D) d hợp với a góc 30^0

Câu 6: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai ?

(A) Qua phép đối xứng trục $Đ_a$, tam giác đều bất kì biến thành chính nó ?

☐ đúng, ☐ sai

(B) Qua phép đối xứng trục $Đ_a$, đường tròn (C) có tâm thuộc a biến thành chính nnó ?

☐ đúng, ☐ sai

(C) Tồn tại phép đối xứng trục $Đ_a$ biến tam giác cân thành chính nó

☐ đúng, ☐ sai

Câu 7: Cho hai đường thẳng d và d' song song. Có bao nhiêu phép đối xứng trục biến đường thẳng này thành đường thẳng kia?

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 4 **(D)** Vô số

Câu 8: Có bao nhiêu phép đối xứng trục biến đường thẳng a thành chính nó

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 4 **(D)** Vô số

Câu 9: Cho hai đường thẳng cắt nhau d, d'. Có bao nhiêu phép đối xứng trục biến đường thẳng này thành đường thẳng kia?

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 4 **(D)** Vô số

Câu 10: Cho đường tròn (C) và đường thẳng a là tiếp tuyến của (C). Gọi (C_1) là ảnh của (C) qua phép đối xứng trục $Đ_a$. Chọn khẳng định đúng:

(A) (C) và (C_1) cắt nhau

(B) (C) và (C_1) không có điểm chung

(C) a cắt (C_1)

(D) a là tiếp tuyến chung của (C) và (C_1)

Câu 11: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng ?

(A) Tam giác cân nhưng không đều có vô số trục đối xứng

(B) Tam giác đều có vô số trục đối xứng

(C) Tam giác cân nhưng không đều có một trục đối xứng

(D) Mọi tam giác đều có trục đối xứng

Câu 12: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai?

(A) Đường tròn có vô số trục đối xứng ☐ đúng, ☐ sai

(B) Phép đối xứng trục biến một đường tròn thành một đường tròn bằng nó
đúng, sai

(C) Tam giác đều có vô số trục đối xứng đúng, sai

(D) Hình vuông có vô số trục đối xứng đúng, sai

Câu 1.: Hình chữ nhật (không phải là hình vuông) có bao nhiêu trục đối xứng?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

Câu 1-: Hình vuông có bao nhiêu trục đối xứng ?

(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8

Câu 1:: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai?

(A) Đường thẳng có vô số trục đối xứng đúng, sai

(B) Hình gồm hai đường tròn cắt nhau và có bán kính bằng nhau có 1 trục đối xứng
đúng, sai

(C) Hình gồm hai đường thẳng song có tất cả các trục đối xứng là các đường thẳng vuông góc với hai đường thẳng ấy □ đúng, □ sai

Câu 1: Cho đường thẳng d và hai điểm A, B nằm cùng phía đối với d. Gọi A_1 đối xứng đối với A, B_1 đối xứng đối với B qua d. M là điểm trên d thoả mãn MA + MB bé nhất. Chọn khẳng định sai

(A) Góc giữa AM và d bằng góc giữa BM và d

(B) M là giao điểm của A_1B và d

(C) M là giao điểm của AB_1 và d

(D) M là giao điểm của AB và d

Câu 1: Cho hai điểm A, B nằm khác phía so với d và khoảng cách từ A đến d khác khoảng cách từ B đến d. A_1 đối xứng với A qua d. M là điểm trên d thoả mãn $|AM - BM|$ lớn nhất. Chọn khẳng định đúng

(A) M là giao điểm của AB và d (B) M là giao điểm của A_1B và d

(C) M là giao điểm AA_1 và d (D) Các khẳng định ở (A), (B), (C) đều sai

Câu 1: Cho điểm M nằm trên đường kính AB của đường tròn (C) bán kính R. Dây cung CD đi qua M và hợp với AB góc 45^0. Giá trị của $CM^2 + DM^2$ bằng

(A) R^2 (B) $3R^2$ (C) $8R^2$ (D) $2R^2$

Câu 1: Cho hai điểm cố định B và C trên đường tròn (O; R) và điểm A thay đổi trên đường tròn đó. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC, H_0 là giao điểm của AH và (O; R) ($H_0 \neq A$). Trong các khẳng định sau khẳng định nào đúng ?

(A) IH_0 là đường trung trực của BC

(B) Tứ giác $BHCH_0$ chỉ có thể là hình bình hành nhưng không phải là hình thoi

(C) I thuộc đường tròn cố định

(D) Các khẳng định ở (A), (B), (C) đều sai

Câu 20: Với mọi tứ giác ABCD. Kí hiệu S(ABCD) là diện tích của tứ giác ABCD. Chọn khẳng định đúng

(A) $S(ABCD) = \frac{1}{2}(AB.CD + BC.AD)$

(B) $S(ABCD) > (AB.CD + BC.AD)$

(C) $S(ABCD) \le \frac{1}{2}(AB.CD + BC.AD)$

(D) $S(ABCD) \ge \frac{1}{2}(AB.CD + BC.AD)$

Câu 21: Trong mặt phẳng Oxy, cho phép biến hình F biến điểm M(x; y) thnành $M_1(-x; y)$

Chọn khẳng định đúng

(A) F là phép đối xứng với trục là Oy

(B) F là phép đối xứng với trục là Ox

(C) F là phép đối xứng với trục là đường phân giác của góc phần tư thứ nhất

(D) F là phép đối xứng với trục là đường phân giác của góc phần tư thứ hai

Câu 22: Trong mặt phẳng Oxy cho phép biến hình F biến M(x; y) thành M'(y; ; x). Chọn khẳng định đúng

(A) F là phép đối xứng với trục là Oy

(B) F là phép đối xứng với trục là Ox

(C) F là phép đối xứng với trục là đường phân giác của góc phần tư thứ nhất

(D) F là phép đối xứng với trục là đường phân giác của góc phần tư thứ hai

Câu 23: Trong mặt phẳng Oxy cho phép đối xứng trục $Đ_a$ với a là đường thẳngg có phương trình 2x – y = 0. Lấy A(2; 2). $Đ_a$(A) có toạ độ bằng bao nhiêu ?

(A) (–2; 2) **(B)** $(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2})$ **(C)** $(\frac{2}{5}; \frac{14}{5})$ **(D)** $(\frac{14}{5}; \frac{2}{5})$

Câu 24: Trong mặt phẳng Oxy cho phép đối xứng trục $Đ_a$ với a là đường thẳngg có phương trình 2x – y = 0. Giả sử $A(a_1; a_2)$. $Đ_a$(A) có toạ độ bằng bao nhiêu?

(A) $(\frac{4a_2 - 3a_1}{5}; \frac{4a_1 + 3a_2}{5})$ **(B)** $(\frac{4a_2 + 3a_1}{5}; \frac{4a_2 - 3a_1}{5})$

(C) $(\frac{3a_2 - 4a_1}{5}; \frac{3a_2 + 4a_1}{5})$ **(D)** $(\frac{3a_2 + 4a_1}{5}; \frac{3a_2 - 4a_1}{5})$

Câu 25: Trong mặt phẳng Oxy, cho hai điểm M(1; 3) và M'(–1; 1). Phép đối xứng trục $Đ_a$ biến điểm M thành M' có trục a có phương trình là:

(A) x – y + 2 = 0 **(B)** x – y – 2 = 0

(C) x + y + 2 = 0 **(D)** x + y – 2 = 0

Câu 26: Trong mặt phẳng Oxy xét phép biến hình F biến điểm $M(x_0; y_0)$ thnành điểm $M_1(x_0 + a; -y_0)$ với mọi x_0, y_0, a là số thực cho trước. Trong các khẳng định sau khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai?

(A) Có giá trị của a để F là phép đối xứng trục ☐ đúng, ☐ sai

(B) Tồn tại ít nhất 2 giá trị khác nhau của a để F là các phép đối xứng trục ☐ đúng, ☐ sai

(C) F là phép dời hình với mọi giá trị của a ☐ đúng, ☐ sai

Câu 27: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho đường thẳng d: x − y − 2 = 0. Ảnh của d qua phép đối xứng trục hoành là đường thẳng có phương trình là:

(A) x + y − 2 = 0 **(B)** x − y + 2 = 0

(C) x + y + 2 = 0 **(D)** x + 2y − 1 = 0

Câu 28: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho đường thẳng d: x − y − 2 = 0. Ảnh của d qua phép đối xứng trục tung là đường thẳng có phương trình là:

(A) x − y + 2 = 0 **(B)** x + y + 2 = 0

(C) x + y − 2 = 0 **(D)** x + 2y − 2 = 0

Câu 29: Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng d: x − y + 1 = 0. Ảnh của d qua phép đối xứng trục là đường phân giác của góc phần tư thứ nhất là đường thẳng có phương trình là:

(A) x + y + 1 = 0 **(B)** x + y − 1 = 0

(C) x − y − 1 = 0 **(D)** x − y + 2 = 0

Câu 30: Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng d: x + y + 1 = 0. Ảnh của d qua phép đối xứng trục là đường phân giác của góc phần tư thứ hai là đường thẳng có phương trình là:

(A) x + y − 1 = 0 **(B)** x − y + 1 = 0

(C) x − y − 1 = 0 **(D)** x + y + 2 = 0

Câu 31: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng d có phương trình x − h = 0. Lấy M(x; y). Giả sử phép đối xứng qua trục d biến M thành M'. M' có toạ độ bằng:

(A) (h − x; y) **(B)** (2h − x; y) **(C)** (h − 2x; y) **(D)** (x − 2h; y)

Câu 32: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng d có phương trình y − h = 0. Lấy M(x; y). Giả sử phép đối xứng qua trục d biến M thành M'. M' có toạ độ bằng:

(A) (x; h − y) **(B)** (x; 2h − y) **(C)** (x; h − 2y) **(D)** (x; y − 2h)

Câu 33: Trong mặt phẳng Oxy cho hai đường thẳng l: y − 2 = 0, d: x + 2y + 2 = 0. Gọi d' là ảnh của d qua phép đối xứng trục l. Phương trình của d' là:

(A) x − 2y + 10 = 0 **(B)** x + 2y + 10 = 0

(C) x − 2y − 10 = 0 **(D)** x + 2y − 10 = 0

Câu 34: Trong mặt phẳng Oxy, cho hai đường thẳng d: x − y = 0 và l: x − 2y = 0. Gọi $Đ_l$ là phép đối xứng qua trục l. Phương trình đường thẳng d_1 là ảnh của d qua $Đ_l$ là

(A) x − 7y = 0 **(B)** 7x − y = 0 **(C)** x + 7y = 0 **(D)** 7x + y = 0

TRẢ LỜI

Câu 1: (B)

Câu 2: (B)

Câu 3:

Giả sử l là đường thẳng vuông góc với a

Lấy A ∈ l, gọi $Đ_a(A) = A_1$. Theo tính chất của phép đối xứng trục $A_1A \perp a$

$\Rightarrow A_1 \in l$

Ngược lại lấy $A_1 \in l$, tồn tại $A \in l$ thoả mãn $Đ_a(A) = A_1$

Vậy $Đ_a(l) = l$

ĐS: (B)

Câu 4: Theo chứng minh ở các câu trắc nghiệm trước ta có d và d' không vuông góc với a, không song song hoặc trùng với a

Gọi $A = d \cap d'$, $Đ_a(A) = A_1$

Theo tính chất của phép đối xứng trục, A_1 là giao điểm của d' và đường thẳng qua A và vuông góc với a, vì vậy $A \equiv A_1$

Vì $Đ_a(A) = A$ nên A nằm trên a, hay nói cách khác d, d', a đồng qui tại A

ĐS: (B)

Câu 5: Theo câu 4, d, d', a phải đồng qui tại M

Lấy $A \in d$, gọi $Đ_a(A) = A' \in d'$

Tam giác MAA' vuông cân tại M

Vậy d hợp với a góc 45^0

ĐS: (C)

Câu 6:

Khẳng định ở (A) rõ ràng là sai

Khẳng định ở (B) là đúng

Khẳng định ở (C) là đúng, phép đối xứng trục biến tam giác cân thành chính nó có trục là đường cao ứng với đỉnh của tam giác cân đó

Câu 7: Có 1 phép đối xứng trục biến đường thẳng này thành đường thẳng kia, đó là phép đối xứng trục là đường thẳng song song và cách đều d, d'

ĐS: (A)

Câu 8: Vô số. Đó là các phép đối xứng với trục là các đường thẳng vuông góc với a

ĐS: (D)

Câu 9: Có hai phép đối xứng trục với các trục là hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường thẳng cắt nhau d, d'

ĐS: (B)

Câu 10: (D)

Câu 11: Tam giác cân nhưng không đều có một trục đối xứng là đường cao ứng với đỉnh của tam giác cân đó

ĐS: (C)

Câu 12:

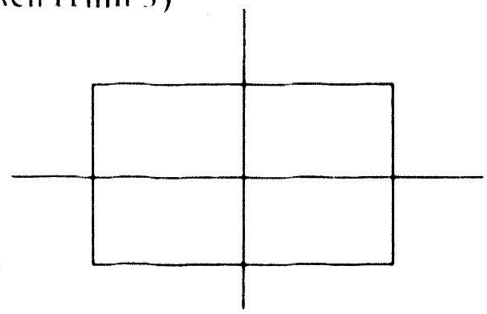
Khẳng định ở (A) đúng. Các đường thẳng qua tâm đều là trục đối xứng của đường tròn, vì vậy đường tròn có vô số trục đối xứng

Khẳng định ở (B) đúng.

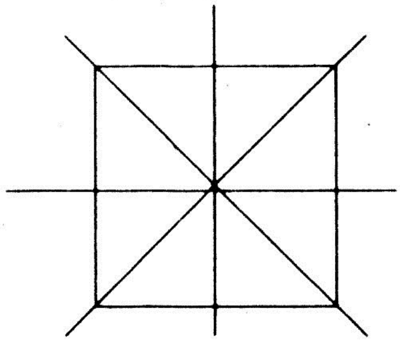
Khẳng định ở (C) sai. Tam giác đều có ba trục đối xứng

Khẳng định ở (D) sai. Hình vuông có bốn trục đối xứng

Câu 13: Hình chữ nhật có 2 trục đối xứng đó là 2 đường trung trực của các cạnh (xem Hình 3)



Hình 3



Hình 4

ĐS: (B)

Câu 14: Hình vuông có 4 trục đối xứng (xem Hình 4).

ĐS: (B)

Câu 15:

(A) Khẳng định đúng

(B) Khẳng định sai. Hình gồm hai đường tròn bằng nhau và cắt nhau có hai trục đối xứng đó là trục đẳng phương của chúng và đường thẳng nối tâm

(C) Khẳng định sai. Hình gồm hai đường thẳng song song gồm các trục đối xứng là các đường thẳng vuông góc với hai đường thẳng và đường thẳng song song cách đều hai đường thẳng đó

Câu 16:

Đây là bài toán khá nổi tiếng quen gọi là "Bài toán Hêrôn về tia sáng" (xem Hình 5)

Với mọi điểm N thuộc d ta có $A_1N + BN \geq A_1B$

Lí do: $A_1N = AN$, $A_1M = AM$, nên

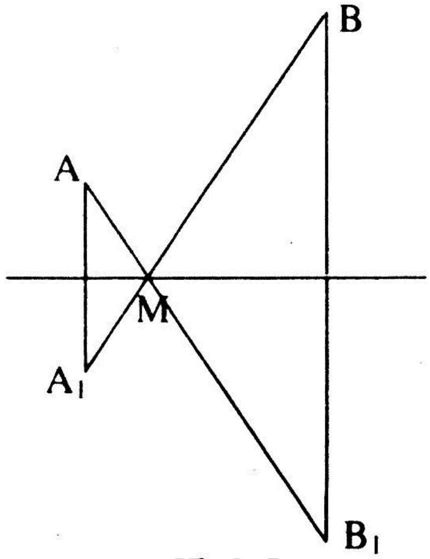
$$AN + BN = A_1N + BN \geq A_1B$$
$$= A_1M + MB = AM + MB$$

Đẳng thức xảy ra khi $M \equiv N$

Vì vậy M là điểm trên d thoả mãn MA + MB bé nhất là giao điểm của AB_1 và d (cũng là giao điểm của A_1B và d)

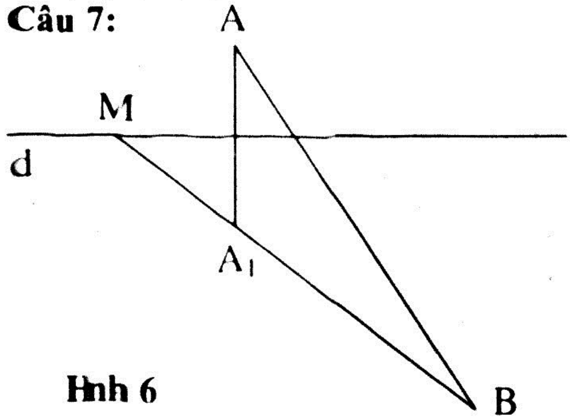
Các khẳng định ở (A), (B), (C) đều đúng

ĐS: (D)



Hình 5

Câu 7:



Hình 6

Vì khoảng cách từ A và B đến d khác nhau nên A_1B cắt d tại M (xem Hình 6)

Với mọi điểm N bất kì thuộc d

$$|AN - BN| = |A_1N - BN| \leq A_1B$$
$$= |A_1M - BM| = |AM - BM|$$

Vậy điểm M thuộc d sao cho $|AM - BM|$ lớn nhất là giao điểm của A_1B và d

ĐS: (B)

Câu 18:

Sử dụng phép đối xứng qua trục AB. Gọi C' đối xứng với C qua AB, D' đối xứng với D qua AB

Rõ ràng C', D' nằm trên đường tròn (Bạn đọc tự vẽ hình)

Dễ chứng minh rằng tam giác C'MD là tam giác vuông tại M

Theo định lí Pitagor:

$$C'M^2 + DM^2 = C'D^2$$

Do tính đối xứng: C'M = CM, vì vậy:

$$CM^2 + DM^2 = C'D^2$$

Dễ thấy $\angle C'CD = 45^0$. Theo định lí sin ta có:

$$C'D = 2R\sin 45^0 = \sqrt{2}\,R$$

Do đó: $CM^2 + DM^2 = 2R^2$

ĐS: (D)

Câu 19: (xem Hình 7)

Ta có $\angle HAC = \angle HBC$ (cùng phụ với góc C)

$\angle HAC = \angle CBH_0$ (cùng chắn cung H_0A)

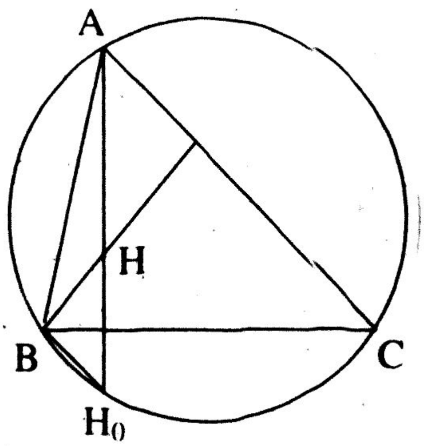
$\Rightarrow \angle HBC = \angle CBH_0$

Vậy H, H_0 đối xứng nhau qua BC

Hay BC là đường trung trực của HH_0

Khẳng định ở câu (A) sai

Vì tứ giác $BHCH_0$ có trục đối xứng là BC nên nếu $BHCH_0$ là hình bình hành thì có thể là hình thoi, khẳng định (B) sai H_0 đối xứng đối với BC, nên H thuộc đường tròn (C) là ảnh của (O; R) qua phép đối xứng trục BC



Hình 7

ĐS: (C)

Câu 20: (xem Hình 8)

Sử dụng phép đối xứng qua đường trung trực AC, và kết quả $S(ABC) \le \frac{1}{2} AB.AC$

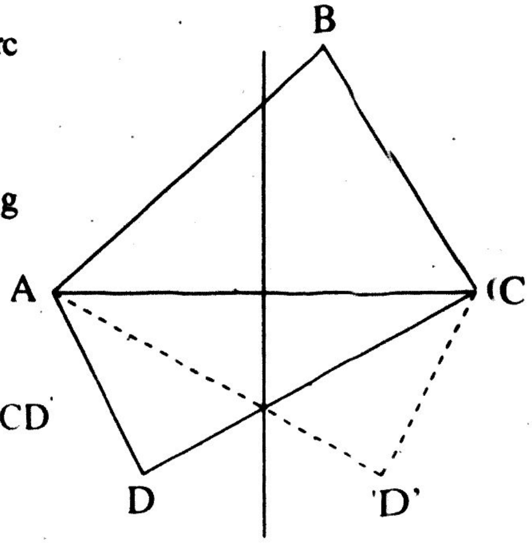
Gọi D' là điểm đối xứng của D qua đường trung trực của AC

$$S(ABCD) = S(ABCD')$$
$$= S(BAD') + S(BCD')$$

Do: $S(BAD') \le \frac{1}{2} AB.AD'$, $S(BCD') \le \frac{1}{2} BC.CD'$

Và AD' = CD; CD' = AD

$$\Rightarrow S(ABCD) \le \frac{1}{2} AB.AD' + \frac{1}{2} BC.CD'$$



Hình 8

$$= \frac{1}{2}(AB.AD + BC.CD) = \frac{1}{2}(AB.CD + BC.AD)$$

ĐS: (C)

Câu 21: F là phép đối xứng trục Oy.

ĐS: (A)

Câu 22: F là phép đối xứng với trục là đường phân giác của góc phần tư thứ nhất.

ĐS: (C)

Câu 23: Đặt $B(x; y) = Đ_a(A)$. Gọi H là trung điểm của AB ta có $H\left(\frac{x+2}{2}; \frac{y+2}{2}\right)$,

$\vec{n}(2; -1)$ là vectơ pháp tuyến của a

Ta có: ($\overrightarrow{AB}$, $\vec{n}$ cùng phương) và $H \in a \Leftrightarrow \begin{cases}(x-2)1 + 2(y-2) = 0 \\ 2.\frac{x+2}{2} - \frac{y+2}{2} = 0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x + 2y = 6 \\ 2x - y = -2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = \frac{2}{5} \\ y = \frac{14}{5}\end{cases}$$

ĐS (C)

Câu 24: Giải tương tự như câu 23

Đặt $B(x; y) = Đ_a(A)$. Gọi H là trung điểm của AB ta có $H\left(\frac{x+a_1}{2}; \frac{y+a_2}{2}\right)$,

$\vec{n}(2; -1)$ là vectơ pháp tuyến của a

Ta có ($\overrightarrow{AB}$, $\vec{n}$ cùng phương) và $H \in a \Leftrightarrow \begin{cases}(x-a_1) + 2(y-a_2) = 0 \\ 2.\frac{x+a_1}{2} - \frac{y+a_2}{2} = 0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x + 2y = a_1 + 2a_2 \\ 2x - y = -2a_1 + a_2\end{cases}$$

Ta có $D = \begin{vmatrix}1 & 2 \\ 2 & -1\end{vmatrix} = -5;$

$$Dx = \begin{vmatrix}a_1 + 2a_2 & 2 \\ -2a_1 + a_2 & -1\end{vmatrix} = -a_1 - 2a_2 + 4a_1 - 2a_2 = 3a_1 - 4a_2$$

$$Dy = \begin{vmatrix}1 & a_1 + 2a_2 \\ 2 & -2a_1 + a_2\end{vmatrix} = -2a_1 + a_2 - 2a_1 - 4a_2 = -4a_1 - 3a_2$$

Vậy $x = \frac{Dx}{D} = \frac{4a_2 - 3a_1}{5}$; $y = \frac{Dy}{D} = \frac{4a_1 + 3a_2}{5}$

ĐS (A)

Câu 25: a phải là đường trung trực của MM'. Ta viết phương trình của a theeo "ngôn ngữ tập hợp" như sau

$A(x; y) \in a \Leftrightarrow AM^2 = AM'^2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-3)^2 = (x+1)^2 + (y-1)^2$

$\Leftrightarrow 4x + 4y - 8 = 0 \Leftrightarrow x + y - 2 = 0$

Vậy phương trình của a là $x + y - 2 = 0$

ĐS: (D)

Câu 26:

Ta viết phương trình đường trung trực (d) của MM_1.

$N(x; y) \in (d) \Leftrightarrow MN^2 = M_1N^2 \Leftrightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = (x - x_0 - a)^2 + (y + y_0))^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x_0x + x_0^2 + y^2 - 2y_0y + y_0^2 = x^2 + x_0^2 + a^2 - 2x_0x - 2ax + 2x_0a + y^2 + 2y_0y + y_0^2$

$\Leftrightarrow 2ax - 4y_0y - 2x_0a - a^2 = 0$ (*)

F là phép đối xứng trục $\Leftrightarrow$ (*) không phụ thuộc $x_0, y_0 \Rightarrow a = 0$

Với a = 0 thì (*) có dạng $-4y_0y = 0 \Rightarrow y = 0$

Như vậy F chỉ có thể là phép đối xứng qua trục hoành

Khẳng định ở (A) là đúng (a = 0)

Khẳng định ở (B) là sai

Ta xét khẳng định ở (C)

Lấy $N(x_1; y_1)$, qua F, N biến thành $N_1(x_1 + a; -y_1)$

Dễ thấy rằng $MM_1 = NN_1$

Vậy F là phép dời hình với mọi giá trị của a

Khẳng định (C) là đúng

Câu 27:

Lấy M(x; y), M'(x; –y) đối xứng với M qua trục hoành

Vậy ảnh của d qua phép đối xứng trục hoành có phương trình

$x - (-y) - 2 = 0 \Leftrightarrow x + y - 2 = 0$

ĐS: (A)

Câu 28:

Lấy M(x; y), M'(–x; y) đối xứng với M qua trục tung

Vậy ảnh của d qua phép đối xứng trục tung là:

$-x - y - 2 = 0 \Leftrightarrow x + y + 2 = 0$

ĐS: (B)

Câu 29: Lấy M(x; y), M'(y; x) là ảnh của M qua phép đối xứng với trục là đường phân giác của góc phần tư thứ nhất

Vậy ảnh của d qua phép đối xứng qua trục là đường phân giác của góc phần tư thứ nhất có phương trình:

$y - x + 1 = 0 \Leftrightarrow x - y - 1 = 0$

ĐS: (C)

Câu 30: Lấy M(x; y), M'(–y; –x) là ảnh của M qua phép đối xứng với trục là đường phân giác của góc phần tư thứ hai

Vậy ảnh của d qua phép đối xứng qua trục là đường phân giác của góc phần tư thứ hai có phương trình:

$-y - x + 1 = 0 \Leftrightarrow x + y - 1 = 0$

ĐS: (A)

Câu 31: M' có toạ độ $(x_1; y)$ với $x + x_1 = 2h \Rightarrow x_1 = 2h - x$

ĐS: (B)

Câu 32: M' có toạ độ $(x; y_1)$ với $y + y_1 = 2h \Rightarrow y_1 = 2h - y$

ĐS: (B)

Câu 33: Theo câu 20, lấy M(x; y). Ảnh của M qua phép đối xứng trục l là $M'(x_1; y_1)$ với:

$$\begin{cases} x_1 = x \\ y_1 = 4 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ y = 4 - y_1 \end{cases}$$

$M \in d \Leftrightarrow x + 2y + 2 = 0 \Leftrightarrow x_1 + 2(4 - y_1) + 2 = 0 \Leftrightarrow x_1 - 2y_1 + 10 = 0$

$\Leftrightarrow M' \in d'$ có phương trình $x - 2y + 10 = 0$

ĐS: (A)

Câu 34:

Có nhiều cách giải bài toán này

d và l cắt nhau tại O(0; 0)

Lấy $M(1; 1) \in d$. Gọi $M_1(x; y)$ là ảnh của M qua $Đ_l$.

l có vectơ pháp tuyến $\vec{n}(1; -2)$

Gọi H là trung điểm của MM_1 ta có $H(\frac{x+1}{2}; \frac{y+1}{2})$

Ta có $H \in l$ và $\overrightarrow{MM_1}$ cùng phương với $\vec{n}$, vì vậy

$$\begin{cases} \frac{x+1}{2} - 2\frac{y+1}{2} = 0 \\ (x-1)2 + (y-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{5} \\ y = \frac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow M_1(\frac{7}{5}; \frac{1}{5})$$

Vậy d_1 là đường thẳng qua O, M_1

ĐS: (A)

§3. PHÉP TỊNH TIẾN

TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Định nghĩa: Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$ là một phép dời hình biến điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$, kí hiệu $T_{\vec{u}}$

2. Tính chất:

- Trong mặt phẳng Oxy, cho $\vec{u}(a; b)$, $M(x; y)$, $T_{\vec{u}}(M) = M'$, ta có $M'(x + a; y + b)$
- Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{0}$ là phép đồng nhất (biến điểm bất kì thành chính nó)
- Phép tịnh tiến là một phép dời hình

CÁC DẠNG TOÁN CƠ BẢN

I. Dạng toán 1: Xác định ảnh của hình H qua phép tịnh tiến

Phương pháp: Để xác định ảnh $\mathbf{H'}$ của hình **H** qua phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$ ta lấy điểm M bất kì và tìm tập hợp các điểm $M' = T_{\vec{v}}(M)$ bằng các cách sau

- Dùng định nghĩa
- Dùng biểu thức vectơ
- Dùng biểu thức toạ độ: Giả sử **H** có phương trình $f(x; y) = 0$, $\vec{v} = (a; b)$

$$M(x; y),\ T_{\vec{v}}(M) = M'(x'; y') \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' - a \\ y = y' - b \end{cases}$$

$$M \in \mathbf{H} \Leftrightarrow f(x; y) = 0 \Leftrightarrow f(x' - a; y' - b) = g(x'; y') = 0 \Leftrightarrow M' \in \mathbf{H'}: g(x; y) = 0$$

VD1: Cho hình lục giác đều ABCDEF có tâm O. Phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{BO}$ tứ giác ABCO biến thành hình nào?

Giải

Qua phép tịnh tiến theo $\overrightarrow{BO}$

A biến thành F

B biến thành O

C biến thành D

O biến thành E

Vậy ảnh cần tìm là hình bình hành FODE

VD2: Trong mặt phẳng Oxy cho vectơ $\vec{u}(1; 2)$, điểm $M(1; 0)$, đường thẳng d: $x + 2y = 0$, đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 2x = 0$

Xét phép tịnh tiến T theo vectơ $\vec{u}$

a) Tìm ảnh của M qua T

b) Tìm ảnh của d qua T

c) Tìm ảnh của (C) qua T

Giải

a) N(2 ; 2)

b) M(x; y), gọi N(x'; y') = T(M) ta có $\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' - 1 \\ y = y' - 2 \end{cases}$

$M \in D \Leftrightarrow x + 2y = 0 \Leftrightarrow (x' - 1) + 2(y' - 2) = 0 \Leftrightarrow x' + 2y' - 5 = 0$

$\Leftrightarrow$ N thuộc đường thẳng d': x + 2y − 5 = 0

Vậy ảnh của d qua T là đường thẳng d': x + 2y − 5 = 0

c) $M \in (C) \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow (x' - 1)^2 + (y' - 2)^2 - 2(x' - 1) = 0$

$\Leftrightarrow x'^2 + y'^2 - 4x' - 4y' + 7 = 0$

$\Leftrightarrow$ N thuộc đường tròn (C'): $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7 = 0$

Vậy ảnh của (C) qua T là đường tròn (C'): $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7 = 0$

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho đường thẳng d có vectơ chỉ phương không cùng phương với vectơ $\vec{u}$. Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$, biến đường thẳng d thành d'. Chọn khẳng định đúng

(A) d song song với d' **(B)** d trùng với d'

(C) d cắt d' **(D)** d' có vectơ chỉ phương $\vec{u}$

Câu 2: Cho đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{u}$. Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$ biến đường thẳng d thành d'. Chọn khẳng định đúng

(A) d song song với d' **(B)** d trùng với d'

(C) d cắt d' **(D)** d' không nhận $\vec{u}$ làm vectơ chỉ phương

Câu 3: Cho hai đường thẳng song a và a'. Có bao nhiêu phép tịnh tiến biến a thành a'?

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 4 **(D)** Vô số

Câu 4: Có bao nhiêu phép tịnh tiến biến đường thẳng a thành chính nó ?

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 4 **(D)** Vô số

Câu 5: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai ?

(A) Phép tịnh tiến biến đường tròn thành đường tròn bằng nó □ đúng, □ sai

(B) Tồn tại phép tịnh tiến biến đường tròn thành chính nó □ đúng, □ sai

(C) Cho hai đường tròn bằng nhau, có vô số phép tịnh tiến biến đường tròn này thành đường tròn kia □ đúng, □ sai

(D) Có vô số phép tịnh tiến biến đường thẳng thành chính nó □ đúng, □ sai

Câu 6: Cho hai đường thẳng d_1 và d_2 song song và cách nhau một khoảng h > 0. Gọi $Đ_1$ và $Đ_2$ lần lượt là phép đối xứng qua trục d_1 và d_2. Với điểm M bất kì, giả sử $Đ_1(M) = M_1$, $Đ_2(M_1) = M_2$. Biết phép biến hình biến M thành M_2 là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$. Độ dài của vectơ $\vec{u}$ bằng

(A) h **(B)** 2h **(C)** 3h **(D)** 4h

Câu 7: Trong mặt phẳng Oxy, cho hai đường thẳng d_1: $x - h_1 = 0$, d_2: $x - h_2 = 0$ (với $h_1 \neq h_2$). Gọi $Đ_1$ và $Đ_2$ lần lượt là phép đối xứng qua trục d_1 và d_2. Với điểm M bất kì, giả sử $Đ_1(M) = M_1$, $Đ_2(M_1) = M_2$. Biết phép biến hình biến M thành M_2 là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$. Toạ độ của vectơ $\vec{u}$ là:

(A) $(2h_1 - 2h_2; 0)$ **(B)** $(2h_2 - 2h_1; 0)$

(C) $(h_2 - h_1; 0)$ **(D)** $(h_1 - h_2; 0)$

Câu 8: Cho đường thẳng d và vectơ $\vec{u} \neq \vec{0}$. Xét phép đối xứng Đ qua trục d, và phép tịnh tiến T theo vectơ $\vec{u}$. Lấy điểm M tuỳ ý. Gọi $Đ(M) = M_1$, $T(M_1) = M_2$. Xét phép biến hình F biến điểm M thành M_2. Các khẳng định sau, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai ?

(A) F không phải là phép dời hình ☐ đúng, ☐ sai

(B) F là một phép tịnh tiến ☐ đúng, ☐ sai

(C) F là phép đối xứng trục ☐ đúng, ☐ sai

Câu 9: Trong mặt phẳng Oxy cho vectơ $\vec{u} = (a; b)$ với $a \neq b$. Xét phép đối xứng Đ qua trục tung, và phép tịnh tiến T theo vectơ $\vec{u}$. Lấy điểm M tuỳ ý. Gọi $Đ(M) = M_1$, $T(M_1) = M_2$. Xét phép biến hình F biến điểm M thành M_2. Gọi N là trung điểm của MM_2. Các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

(A) F là phép dời hình

(B) Trung điểm N thuộc đường thẳng $x = \frac{b}{2}$

(C) Trung điểm N thuộc đường thẳng $x = \frac{a}{2}$

(D) Trung điểm N thuộc một đường thẳng cố định

Câu 10: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy xét điểm $M(-1; 2)$, $\vec{u} = (1; 2)$. Gọi Đ là phép đối xứng qua đường phân giác của góc phần tư thứ nhất, T là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$, $M_1 = Đ(M)$, $M_2 = T(M_1)$. Điểm M_2 có toạ độ là

(A) (3; 1) **(B)** (3; −1) **(C)** (−3; 1) **(D)** (−3; −1)

Câu 11: Gọi T_1, T_2 là hai phép tịnh tiến. Giả sử M là điểm bất kì. Gọi $M_1 = T_1(M)$, $M_2 = T_2(M_1)$. Gọi F là phép biến hình biến điểm M thành điểm M_2. Chọn khẳng định đúng

(A) F không phải là phép dời hình

(B) F là một phép đối xứng trục

(C) F là một phép tịnh tiến

(D) Các khẳng định ở (A), (B), (C) đều sai

Câu 12: Trong hệ toạ độ Oxy, cho parabol (P) có phương trình $y = x^2 + x$. Gọi T là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u} = (-1; 2)$, (P_1) là ảnh của (P) qua phép tịnh tiến T. Phương trình của (P_1) là:

(A) $y = (x + 1)^2 + (x + 1) - 2$ **(B)** $y = (x - 1)^2 + (x - 1) + 2$

(C) $y = (x + 1)^2 + (x + 1) + 2$ **(D)** $y = (x - 1)^2 + (x - 1) - 2$

Câu 1.: Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng d: $x + 2y - 1 = 0$. Để phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$ biến d thành d thì vectơ $\vec{u}$ phải là vectơ nào trong các vectơ sau?

(A) $\vec{u} = (-2; 4)$ **(B)** $\vec{u} = (2; -4)$ **(C)** $\vec{u} = (2; 4)$ **(D)** $\vec{u} = (4; 2)$

Câu 1.: Cho hai điểm A, B phân biệt. Với mọi điểm M bất kì, lấy M_1 đối xứng với M qua A, M_2 đối xứng với M_1 qua B. Xét phép biến hình F biến M thành M_2. Chọn khẳng định đúng

(A) F không phải là phép dời hình **(B)** F là phép đối xứng trục

(C) F là phép tịnh tiến **(D)** Các khẳng định ở (A), (B), (C) đều sai

Câu 15 Cho 4 điểm phân biệt A, B, C, D. Gọi S_1, S_2, S_3, S_4 là phép lấy đối xứng qua A, B, C, D Với điểm M tuỳ ý. Gọi $M_1 = S_1(M)$, $M_2 = S_2(M_1)$, $M_3 = S_3(M_2)$, $M_4 = S_4(M_3)$

Xét phép biến hình F biến M thành M_4. F là phép tịnh tiến theo vectơ

(A) $2\overrightarrow{AD}$ **(B)** $2(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$

(C) $2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD})$ **(D)** $2(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC})$

Câu 16 Trong mặt phẳng Oxy, xét phép đối xứng qua trục hoành Đ và phép tịnh tiến T theo vectơ $\vec{u} = (a; 0)$ với $a \neq 0$. Gọi M là điểm bất kì, M_1 = Đ(M), $M_2 = T(M_1)$. Xét phép biến hình F biến M thành M_2. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai?

(A) F là phép dời hình ☐ đúng, ☐ sai

(B) Nếu M có toạ độ $(x; y)$ thì M_2 có toạ độ $(a - x; y)$ ☐ đúng, ☐ sai

(C) F là một phép đối xứng trục ☐ đúng, ☐ sai

(D) F là phép tịnh tiến ☐ đúng, ☐ sai

Câu 17 Cho đường tròn tâm O bán kính R, B, C là hai điểm trên đường tròn. Lấy điểm A bất kì thuộc đường tròn. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Gọi B_1 là ảnh của C qua phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{HA}$. Chọn khẳng định đúng

(A) $BB_1 > 2R$ **(B)** $BB_1 = 2R$ **(C)** $BB_1 = R$ **(D)** $BB_1 = 1,5R$

Câu 18 Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) tâm O, Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên BC, K là trực tâm của tam giác ABC. Gọi (O') là đường tròn đối xứng với (O) qua BC. (O') là ảnh của (O) qua phép tịnh tiến theo vectơ nào sau đây?

(A) $\overrightarrow{AK}$ **(B)** $0,5\overrightarrow{AK}$ **(C)** $\overrightarrow{AH}$ **(D)** $0,5\overrightarrow{AH}$

Câu 19 Hai đường tròn bán kính R tiếp xúc ngoài với nhau tại K. Trên một đường tròn ta lấy điểm A, trên đường tròn kia ta lấy điểm B sao cho $\angle AKB = 90^0$. Độ dài AB bằng bao nhiêu?

(A) R **(B)** $\sqrt{2}R$ **(C)** $\sqrt{3}R$ **(D)** 2R

Câu 20 Từ đỉnh B của hình bình hành ABCD kẻ các đường cao BK và BH của nó. Biết rằng KH = 3, BD = 5. Khoảng cách từ điểm B đến trực tâm H_1 của tam giác BKH có giá trị bằng

(A) 4 **(B)** 5 **(C)** 6 **(D)** 4,5

Câu 21: Hai đường tròn bán kính bằng R cắt nhau tại M, N. Đường trung trực của MN cắt các đường tròn tại hai điểm A, B sao cho A, B nằm cùng một phía so với MN. Giá trị của $MN^2 + AB^2$ bằng bao nhiêu?

(A) $2R^2$ **(B)** $3R^2$ **(C)** $4R^2$ **(D)** $6R^2$

Câu 22: Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng d có phương trình $y = 2$ và hai điểm A(1; 3) và B(3; –4). Lấy điểm M trên d, N trên trục hoành sao cho MN vuông góc với d và AM + MN + NB bé nhất. Toạ độ M, N bằng bao nhiêu?

(A) $M(\frac{6}{5}; 2), N(\frac{6}{5}; 0)$ **(B)** $M(\frac{7}{5}; 2), N(\frac{7}{5}; 0)$

(C) $M(\frac{8}{5}; 2), N(\frac{8}{5}; 0)$ **(D)** $M(\frac{9}{5}; 2), N(\frac{9}{5}; 0)$

TRẢ LỜI

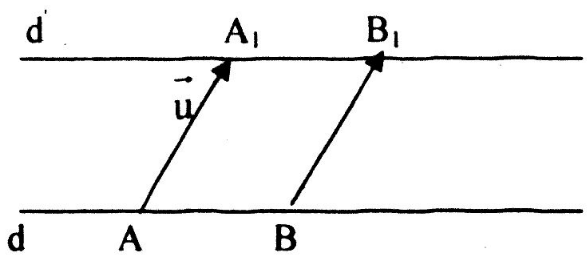
Câu 1: d song song với d'. **ĐS: (A)** (xem Hình 9)

$A \in d, T(A) = A_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{AA_1} = \vec{u}$

$B \in d, T(B) = B_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{BB_1} = \vec{u}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BB_1}$

$\Rightarrow AB // A_1B_1$, hay d // d'



Hình 9

Câu 2: (B)

Câu 3: Có vô số phép tịnh tiến biến a thành a', đó là các phép tịnh tiến theo vectơ có điểm đầu thuộc a, điểm cuối thuộc a'.

ĐS: (D)

Câu 4: Có vô số phép tịnh tiến biến đường thẳng a thành chính nó, đó là các phép tịnh tiến theo vectơ cùng phương với vectơ chỉ phương của a, hoặc phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{0}$.

ĐS: (D)

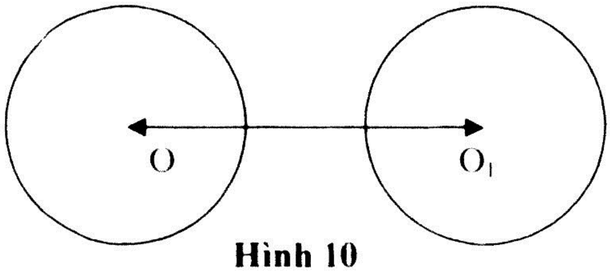
Câu 5: (xem Hình 10)

Khẳng định ở (A) đúng vì phép tịnh tiến là một phép dời hình

Khẳng định ở (B) đúng, phép tịnh tiến biến đường tròn thành chính nó chính là phép đồng nhất (phép tịnh tiến theo vectơ không)

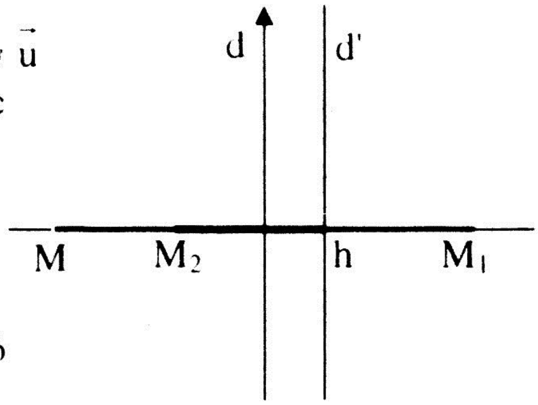
Khẳng định ở (C) là sai. Nếu 2 đường tròn đồng tâm thì có một phép tịnh tiến đó là phép đồng nhất biến đường tròn thành chính nó. Nếu 2 đường tròn lần lượt có tâm O, O_1 phân biệt, thì có 2 phép tịnh tiến biến đường tròn này thành đường tròn kia đó là phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{OO_1}$ và $\overrightarrow{O_1O}$

Khẳng định ở (D) là đúng, đó là các phép tịnh tiến theo vectơ cùng phương với vectơ chỉ phương của đường thẳng, hoặc phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{0}$



Hình 10

Câu 6: (xem Hình 11)



Hình 11

Ta dùng biểu thức toạ độ để tìm độ dài vectơ $\vec{u}$

Chọn hệ trục toạ độ Oxy sao cho d là trục Oy, d' là đường thẳng có phương trình x = h

Lấy M(x; 0). Ta có:

$M_1(-x; 0)$; $M_2(2h + x; 0)$

$\overrightarrow{MM_2} = (2h; 0)$

Vậy phép tịnh tiến biến điểm M thành M_2 có vectơ tịnh tiến $\vec{u} = (2h; 0)$

Vì vậy $\vec{u}$ có độ dài bằng 2h.

ĐS: (B)

Câu 7: Sử dụng kết quả câu 31, 32, phần phép đối xứng trục

Lấy điểm $M(x; y) \Rightarrow M_1(2h_1 - x; y) \Rightarrow M_2(2h_2 - 2h_1 + x; y)$

$\Rightarrow \overrightarrow{MM_2} = (2h_2 - 2h_1; 0)$

ĐS: (B)

Câu 8: Ta dùng phương pháp toạ độ để giải bài toán này

Xét hệ toạ độ Oxy với d: x = 0, $\vec{u} = (a; b)$

Giả sử $M(x_1; y_1)$, $N(x_2; y_2)$ ta có

$M(-x_1; y_1)$, $M_2(-x_1 + a; y_1 + b)$

Tương tự $N_2(-x_2 + a; y_2 + b)$

Ta có $M_2N_2^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = MN^2$

Vậy F phải là phép dời hình

Khẳng định ở (A) sai

Khẳng định ở (B) sai vì $\overrightarrow{MM_2} = (-2x_1 + a; b)$ có toạ độ thay đổi

Khẳng định ở (C) sai. Thật vậy giả sử ngược lại, phép biến hình nói trên là phép đối xứng trục, thì a có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{MM_2} = (-2x_1 + a; b)$ có phương không đổi (vô lí)

Chú ý Hợp thành của nhiều phép dời hình là phép dời hình

Câu 9: Theo kết quả của câu 8, F là phép dời hình

Giải như câu 8, ta thấy N thuộc đường thẳng cố định $x = \dfrac{a}{2}$

Vậy (D) sai.

ĐS: (D)

Câu 10: Chú ý rằng phép đối xứng qua đường phân giác của góc phần tư thứ nhấ biến điểm $M(x; y)$ thành $M'(y; x)$. Phép đối xứng qua đường phân giác góc phần t thứ hai biến điểm $M(x; y)$ thành điểm $M'(-y; -x)$

Theo kết quả trên ta có: $M_1(2; -1)$, $M_2(3; 1)$

ĐS: (A)

Câu 11: Nhận xét rằng một phép tịnh tiến không thể là một phép đối xứng trục

Ta dùng phương pháp toạ độ để giải quyết câu hỏi trắc nghiệm này

Giả sử T_1 là phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{u_1} = (a_1; b_1)$, T_2 là phép tịnh tiến the vectơ $\overrightarrow{u_2} = (a_2; b_2)$

Giả sử $M(x; y)$, ta có $M_1(x + a_1; y + b_1)$, $M_2(x + a_1 + a_2; y + b_1 + b_2)$

Vậy F là phép tịnh tiến theo véctơ $\vec{u} = \overrightarrow{MM_2} = (a_1 + a_2; b_1 + b_2) = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}$

ĐS: (C)

Câu 12: Với điểm $M(x; y)$, gọi $T_{\vec{u}}(M) = M'$, ta có $M'(x'; y')$ với

$$\begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' + 1 \\ y = y' - 2 \end{cases}$$

$M \in (P) \Leftrightarrow y = x^2 + x \Leftrightarrow y' - 2 = (x' + 1)^2 + (x' + 1) \Leftrightarrow y' = (x' + 1)^2 + (x' + 1)) + 2$

$\Leftrightarrow M'$ thuộc parabol: $y = (x + 1)^2 + (x + 1) + 2$

ĐS: (C)

Câu 13: Chú ý rằng phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ biến đường thẳng d thành chín nó khi và chỉ khi $\vec{v}$ cùng phương với vectơ chỉ phương của d, $\vec{u}$ phải cùng phươn với vectơ chỉ phương $\vec{v} = (1; 2)$ của đường thẳng d

Vì $\dfrac{2}{1} = \dfrac{4}{2} \Rightarrow \vec{u} = (2; 4)$ cùng phương với $\vec{v}$

ĐS: (C)

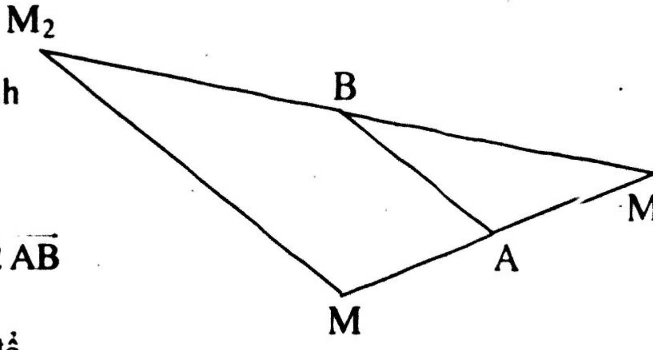
Câu 14: (xem Hình 12)

Chú ý rằng AB là đường trung bình trong tam giác MM_1M_2

Vì vậy $\overrightarrow{MM_2} = 2\overrightarrow{AB}$

Vậy F là phép tịnh tiến theo vectơ $2\overrightarrow{AB}$

ĐS: (C)



Hình 12

Có thể dùng phương pháp toạ độ để giải bài toán này như sau

Trong mặt phẳng Oxy, gọi $A(a_1; a_2)$, $B(b_1; b_2)$ lấy điểm $M(x; y)$ suy ra

$M_1(2a_1 - x; 2a_2 - y)$, $M_2(2b_1 - 2a_1 + x; 2b_2 - 2a_2 + y)$

$\Rightarrow \overrightarrow{MM_2} = (2b_1 - 2a_1; 2b_2 - 2a_2) = 2\overrightarrow{AB}$

Vậy F là phép tịnh tiến theo vectơ $2\overrightarrow{AB}$

Câu 15:

Theo câu 14: $\overrightarrow{MM_2} = 2\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{M_2M_4} = 2\overrightarrow{CD}$

$\Rightarrow \overrightarrow{MM_4} = 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD})$

ĐS: (C)

Câu 16:

$M(x; y) \Rightarrow M_1(x; -y) \Rightarrow M_2(x + a; -y)$

Tương tự gọi $N(x_1; y_1)$ thì $N_2(x_1 + a; -y_1)$

Ta có: $M_2N_2^2 = (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 = MN^2$

Vậy F là phép dời hình

Khẳng định ở (A) đúng

Rõ ràng khẳng định ở (B) là sai

F không thể là phép đối xứng trục (Xem phần đối xứng trục)

Khẳng định ở câu (C) là sai

Vì $\overrightarrow{MM_2} = (a; -2y)$ phụ thuộc vào y, nên F không thể là phép tịnh tiến

Khẳng định ở (D) là sai

Câu 17: xem Hình 13)

$AHCB_1$ là hình bình hành nên $AB_1 // CH$

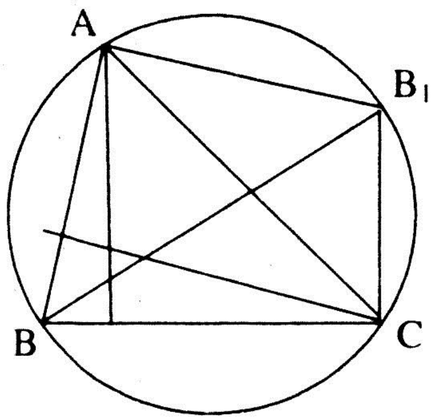
$\Rightarrow AH_1 \perp AB$

Lại do: $BC \perp CB_1$

Vậy tứ giác $ABCB_1$ nội tiếp đường tròn đường kính BB_1

Vì thế $BB_1 = 2R$

ĐS: (B)



Hình 13

Câu 18:

Gọi K là trực tâm của tam giác ABC, B_1 đối xứng với B qua O, M là trung điểm của BC. Vì $\angle BCB_1 = 90^0$ nên $B_1C // AK$.

Tương tự $AB_1 // CH$. Vì vậy $AKCB_1$ là hình bình hành

$\Rightarrow \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{B_1C} = 2\overrightarrow{OM}$

Vì (O') đối xứng với (O) qua BC nên $\overrightarrow{OO'} = 2\overrightarrow{OM}$

ĐS: (A)

Câu 19:

Sử dụng phép tịnh tiến T theo vectơ $\overrightarrow{O_1O_2}$ (bạn đọc tự vẽ hình)

K biến thành C

KA biến thành CB

Vì vậy AB = 2R

ĐS: (D)

Câu 20: (xem Hình 14)

Thực hiện phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{KD}$, ta có

K biến thành D

H_1 biến thành H (bạn đọc hãy CM)

B biến thành P (xem hình vẽ)

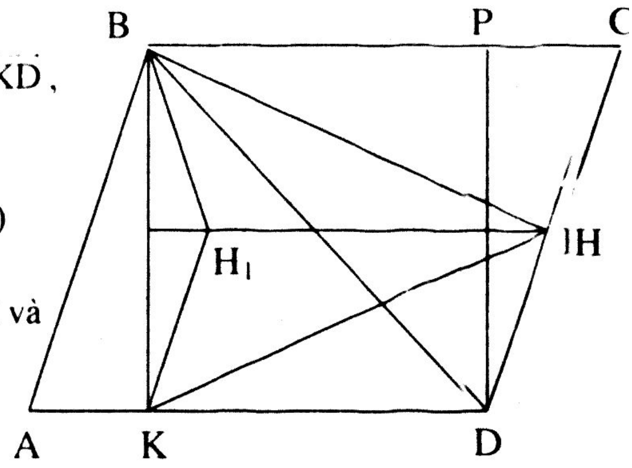
Ta có: tam giác PHK vuông góc tại H và

$KH = 3$, $KP = BD = 5$, nên

$PH = \sqrt{25-9} = 4$

Lại do $BH_1 = PH$ nên $BH_1 = 4$

ĐS: (A)



Hình 14

Câu 21: Giả sử trung trực của MN cắt (O_1) tại A cắt (O_2) tại B (O_1 ở giữa AA, B
(Bạn đọc tự vẽ hình)

Thực hiện phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{O_2O_1}$

Đường tròn (O_2) biến thành đường tròn (O_1), vì vậy B biến thành A, M biế thành M_1, N biến thành N_1

MNN_1M_1 là hình bình hành nội tiếp nên là hình chữ nhật

Vì vậy $MN^2 + M_1M^2 = MN^2 + AB^2 = 4R^2$

ĐS: (C)

Câu 22: Ta giải bài toán sau: Cho hai đường thẳng d_1, d_2 song nhau và hai điểm A B nằm khác phía so với hai đường thẳng trên (Xem hình). Tìm M, N lần lượt thuộ d_1 và d_2 sao cho MN vuông góc với d_1 và $AM + MN + NB$ bé nhất

Gọi H, K theo thứ tự thuộc d_1, d_2 sao cho HK vuông góc với d_1

Gọi T là phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{HK}$.

Gọi $A_1 = T(A)$ (Xem hình 15)

Gọi N là giao điểm của A_1B và d_2

Gọi M thuộc d_1: MN vuông góc với d_1

M, N chính là các điểm cần tìm

Thật vậy ta có:

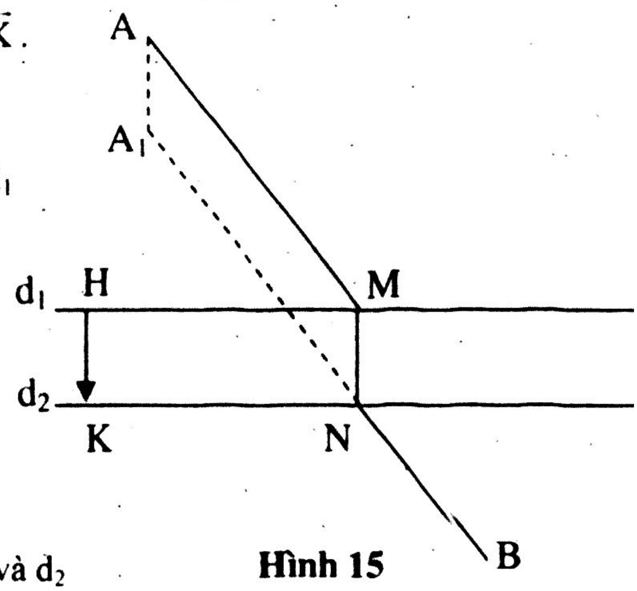
$AM + MN + NB$ nhỏ nhất

$\Leftrightarrow AM + NB$ nhỏ nhất (do MN không đổi)

Ta có:

$AM + NB = A_1N + NB \geq A_1B$

Dấu "=" khi N là giao điểm của A_1B và d_2



Hình 15

Trở lại bài toán:

Lấy $A_1(1; 1)$, điểm N cần tìm là giao điểm của A_1B và trục hoành

Gọi $N(x_0; 0)$, ta có

Ta có $\overrightarrow{A_1N} = (x_0 - 1; -1)$, $\overrightarrow{A_1B} = (2; -5)$

Vì $\overrightarrow{A_1N}$ và $\overrightarrow{A_1B}$ cùng phương nên:

$$\frac{x_0 - 1}{2} = \frac{-1}{-5} \Rightarrow x_0 = \frac{7}{5}$$

Vậy $N(\frac{7}{5}; 0)$ và vì vậy $M(\frac{7}{5}; 2)$

ĐS: (B)

§4. PHÉP QUAY VÀ PHÉP ĐỐI XỨNG TÂM

TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Định nghĩa: Trong mặt phẳng cho điểm O cố định và góc lượng giác φ không đổi.

Phép biến hình biến mỗi điểm M thành M' sao cho OM = OM' và (OM, OM') = φ được gọi là phép quay tâm O góc quay φ

2. Định lí: Phép quay là phép dời hình

3. Định nghĩa: Phép đối xứng qua điểm O là một phép dời hình biến mỗi điểm M thành điểm M' đối xứng qua M, có nghĩa là $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'} = \vec{0}$

4. Định lí: Phép đối xứng tâm là phép dời hình

5. Trong hệ toạ độ Oxy, cho điểm I(a; b), nếu phép đối xứng tâm $Đ_I$ biến điểm M thành điểm M' thì $\begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = 2b - y \end{cases}$

6. Định nghĩa: Điểm O được gọi là tâm đối xứng của hình **H** nếu phép đối xứng tâm $Đ_O$ biến hình **H** thành chính nó

7. Định nghĩa: Hai hình được gọi là bằng nhau nếu có phép dời hình biến hình này thành hình kia

CÁC DẠNG TOÁN CƠ BẢN

I. Dạng toán I: Xác định ảnh của hình H qua phép quay Q

Phương pháp:

1. Với mọi điểm M ∈ H, Gọi M' = Q(M), ta tìm tập hợp các điểm M'

2. Chú ý tính chất quan trọng sau: Giả sử phép quay tâm I góc α biến đường thẳng d thành d'. Khi đó:

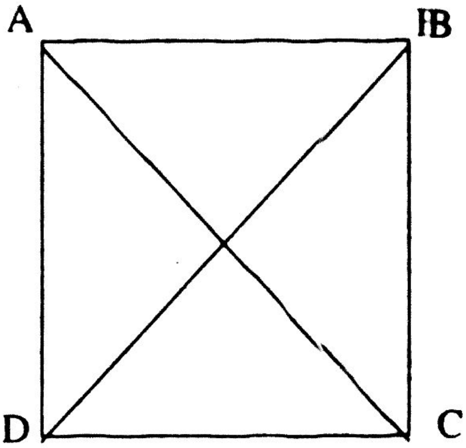
- Nếu $0 < \alpha \le 90^0$ thì góc giữa d và d' là 90^0
- Nếu $90^0 < \alpha \le 180^0$ thì góc giữa d và d' là $180^0 - \alpha$

VD1: Cho hình vuông ABCD có tâm O như hình vẽ 16. Phép quay tâm O góc quay -90^0 biến tam giác ABC thành tam giác nào?

Giải

Phép quay tâm O góc quay -90^0 biến A thành B, B thành C, C thành D

Vậy tam giác ABC biến thành BCD



Hình 16

VD2: Trong mặt phẳng Oxy cho điểm M (2; 0) và đường thẳng d: x + 2y − 2 = 0, đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 4x = 0$

Xét phép quay Q tâm O góc quay 90^0

a) Tìm ảnh của M qua phép quay Q

b) Tìm ảnh của d qua phép quay Q

c) Tìm ảnh của (C) qua Q

Giải

a) M'(0; 2)

b) Sử lụng tính chất đã nêu trong phần phương pháp

M(2; 0) ∈ d, ảnh của M qua phép quay Q là M'(0; 2)

Gọi d' là ảnh của d qua Q, d' là đường thẳng qua M' và vuông góc với d

d có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; 2)$, vì vậy d' có vectơ pháp tuyến $\vec{n'} = (2; -1)$

$\Rightarrow$ d': 2(x − 0) − 1(y − 2) = 0 $\Leftrightarrow$ 2x − y + 2 = 0

c) (C) có tâm M(2; 0) và bán kính R = 2

Ảnh của M qua Q là M'(0; 2)

Gọi (C') là ảnh của (C) qua Q, (C') có tâm M' và bán kính R = 2.

Vậy (C'): $(x-0)^2 + (y-2)^2 = 4$

II. Dạng toán 2: Xác định ảnh của hình H qua phép đối xứng tâm $Đ_I$

Phương pháp: Ngoài phương pháp tương tự như đã nêu ở phần phép quay, ta chú ý đến phương pháp giải bài toán hình giải tích sau:

Trong mặt phẳng Oxy, xét hình **H** có phương trình f(x; y) = 0, và điểm I(a; b). Tìm ảnh của hình **H** qua phép đối xứng tâm $Đ_I$

$$M(x; y).\ Đ_I(M) = M'(x'; y') \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = 2b - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2a - x' \\ y = 2b - y' \end{cases}$$

$M \in$ **H** $\Leftrightarrow f(x; y) = 0 \Leftrightarrow f(2a - x'; 2b - y') = g(x'; y') = 0 \Leftrightarrow M' \in$ **H'**$: g(x; y) = 0$

VD: Trong mặt phẳng Oxy cho điểm I(1; 2), M(−2; 4), đường thẳng d: 2x + y − 2 = 0. Xét phép đối xứng tâm $Đ_I$

a) Tìm ảnh của M qua $Đ_I$

b) Tìm ảnh của d qua $Đ_I$

Giải

a) M'(4; 0)

b) N(x; y), gọi $N'(x'; y') = Đ_I(M)$ ta có $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - x' \\ y = 4 - y' \end{cases}$

$N \in d \Leftrightarrow 2x + y - 2 = 0 \Leftrightarrow 2(2 - x') + (4 - y') - 2 = 0 \Leftrightarrow 2x' + y' - 6 = 0$

$\Leftrightarrow$ N' thuộc đường thẳng d': 2x + y − 6 = 0

Vậy ảnh của d qua $Đ_I$ là d': 2x + y − 6 = 0

III. Dạng toán 3: Tìm tâm đối xứng của một hình

Phương pháp: Nếu đa giác có tâm đối xứng là I thì phép đối xứng tâm I biến mỗi đỉnh của đa giác thành mỗi đỉnh của nó và biến mỗi cạnh của đa giác thành một cạnh song song và bằng cạnh ấy

VD1: Tìm tâm đối xứng của hình gồm hai đường thẳng cắt nhau

Giải

Dễ thấy rằng tâm đối xứng của đường thẳng là tất cả các điểm thuộc đường thẳng đó ()

Cho hai đường thẳng a, b cắt nhau tại O

Ta chứng minh tâm đối xứng của hình **H** gồm hai đường thẳng cắt nhau a, b là C

- Theo (*), O là tâm đối xứng của **H**
- Giả sử **H** có tâm đối xứng khác là A không thuộc a. Cũng theo nhận x

(*), b là ảnh của a qua phép đối xứng tâm A, vì vậy a // b, vô lí

Trường hợp A không thuộc b, chứng minh tương tự

Vậy **H** có một tâm đối xứng là O

VD2: Tìm tâm đối xứng của hình bình hành ABCD.

Giải

Gọi I là tâm đối xứng của hình bình hành ABCD. Xét phép đối xứng qua tâm I: Đ

Qua $Đ_I$: A chỉ có thể biến thành A, B, C, D

- Nếu $Đ_I(A) = A$: thì A là tâm đối xứng, vô lí
- Nếu $Đ_I(A) = B$ (hoặc $Đ_I(A) = D$)): thì tâm đối xứng là trung điểm của A

(hoặc trung điểm của AD), vô lí

- Nếu $Đ_I(A) = C$ thì I là trung điểm của AC

Vậy hình bình hành có đúng một tâm đối xứng là trung điểm của AC

IV. Dạng toán 4: Chứng minh hai hình bằng nhau

Phương pháp: Để chứng minh hai hình bằng nhau ta chứng minh hình này ảnh của hình kia qua phép dời hình nào đó

VD: Chứng minh rằng hai hình vuông có cạnh bằng nhau thì hai hình vuông bằng nhau

Giải

Giả sử hình vuông ABCD có tâm O, hình vuông $A_1B_1C_1D_1$ có tâm O_1 và AB = A_1

(xem Hình 17)

Ta thực hiện phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{OO_1}$: hình vuông ABCD biến thà

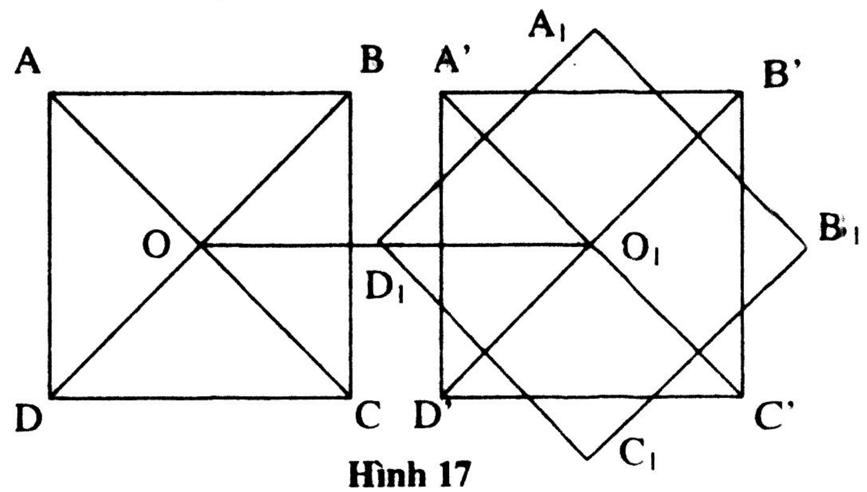
A'B'C'D'

Tiếp theo ta thực hiện phép quay Q tâm O_1 góc quay (O_1A', O_1A_1): hình vuô

A'B'C'D' biến thành hình vuông $A_1B_1C_1D_1$

Lại do hợp thành của hai phép dời hình là phép dời hình

Vậy hai hình vuông có cạnh bằng nhau là hai hình vuông bằng nhau



Hình 17

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai?

(A) Phép đối xứng tâm là một phép quay □ đúng, □ sai

(B) Phép quay là phép đối xứng tâm □ đúng, □ sai

(C) Có phép tịnh tiến là phép quay □ đúng, □ sai

(D) Phép đối xứng trục là một phép quay □ đúng, □ sai

Câu 2: Cho phép quay Q tâm O với góc quay φ thoả mãn $-180^0 \le \varphi \le 180^0$, d' là ảnh của đường thẳng d qua Q. Gọi α là góc giữa d và d'. Trong các khẳng định sau khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai?

(A) Nếu $\varphi > 90^0$ thì $\alpha = 180^0 - \varphi$ □ đúng, □ sai

(B) Nếu $|\varphi| \le 90^0$ thì $\alpha = |\varphi|$ □ đúng, □ sai

(C) Nếu $\varphi < -90^0$ thì $\alpha = 180^0 - |\varphi|$ □ đúng, □ sai

Câu 3: Cho tam giác bất kì ABC. Giả sử $A_1B_1C_1$ là ảnh của ΔABC qua phép quay Q, M_1 là ảnh của M qua Q. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai?

(A) $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ □ đúng, □ sai

(B) Nếu M là trực tâm của ΔABC thì M_1 là trọng tâm của $\Delta A_1B_1C_1$

□ đúng, □ sai

(C) Nếu M là trực tâm của ΔABC và M_1 là trọng tâm của $\Delta A_1B_1C_1$ thì ABC là tam giác đều □ đúng, □ sai

Câu 4: Cho hai đường thẳng a, b cắt nhau và góc giữa chúng là α. Gọi $Đ_a$ là phép đối xứng qua a, $Đ_b$ là phép đối xứng qua b. Với mọi điểm M bất kì, gọi $M_1 = Đ_a(M)$, $M_2 = Đ_b(M_1)$. Xét phép biến hình F biến M thành M_2. Trong các khẳng định sau khẳng định nào đúng?

(A) F không phải là phép dời hình

(B) F là phép quay với góc quay có giá trị tuyệt đối là α

(C) F là phép quay với góc quay có giá trị tuyệt đối là 2α

(D) F là phép quay với góc quay 4α

Câu 5: Cho phép quay Q_1 tâm O góc quay α_1, phép quay Q_2 tâm O góc quay α_2. Với điểm M bất kì, gọi $M_1 = Q_1(M)$, $M_2 = Q_2(M_1)$. Gọi F là phép biến hình biến M thành M_2. Chọn khẳng định nào đúng

(A) F không phải là phép dời hình

(B) Với mọi giá trị α_1 thoả mãn $\alpha_1 = \alpha_2$ thì F là phép đối xứng tâm

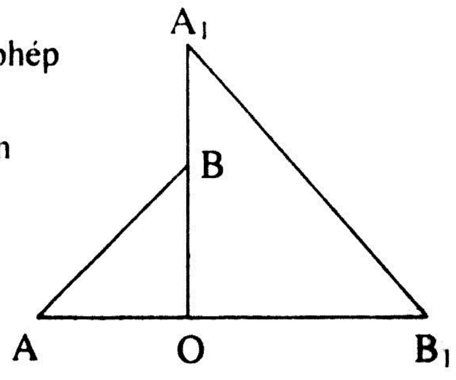
(C) Nếu $\alpha_1 + \alpha_2 = 360^0$ thì F là một phép tịnh tiến

(D) Các khẳng định ở (A), (B), (C) đều sai

Câu 6: Cho hai tam giác vuông OAB và OA_1B_1 được sắp xếp như hình 18

Xét phép quay F tâm O góc quay -90^0.

Chọn mệnh đề đúng



Hình 18

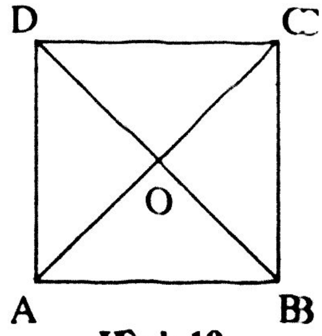
(A) F biến tam giác OAB thành tam giác OA_1B_1

(B) F biến tam giác OA_1B_1 thành tam giác OAB

(C) F biến tam giác OAA_1 thành tam giác OBB_1

(D) F biến tam giác OBB_1 thành tam giác OAA_1

Câu 7: Cho hình vuông ABCD tâm O như Hình 19. Qua phép quay tâm O góc quay 90^0, đoạn thẳng BC biến thành đoạn thẳng nào?

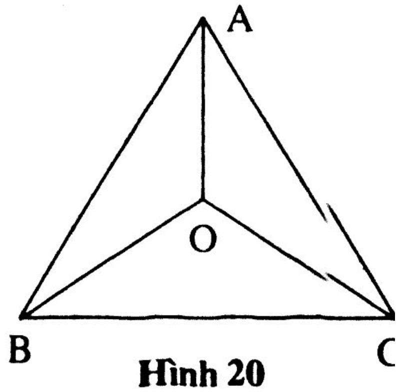


Hình 19

(A) CD (B) DA

(C) AB (D) BC

Câu 8: Cho tam giác đều ABC có tâm O (hình 20). Qua phép quay tâm O góc 240^0, đoạn thẳng OC biến thành đoạn thẳng nào?



Hình 20

(A) OA (B) OB

(C) OC (D) BC

Câu 9: Cho hai tam giác vuông cân OAB và OA_1B_1 có chung đỉnh O sao cho O nằm trên đoạn AB_1 và nằm ngoài đoạn A_1B (xem hình 18). Gọi I, I_1 lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác OAA_1 và OBB_1. Tam giác OII_1 là tam giác gì?

(A) Tam giác vuông không cân (B) Tam giác vuông cân

(C) Tam giác có một góc bằng 30^0 (D) Tam giác đều

Câu 10: Cho tam giác đều ABC có tâm O, P và Q là hai điểm di động lần lượt trên hai cạnh AB và AC sao cho AP = CQ. Số đo của $\angle POQ$ bằng

(A) 90^0 (B) 120^0

(C) 135^0 (D) Các khẳng định ở a, b, c đều sai

Câu 11: Trên đoạn thẳng AE về một phía so với nó dựng các tam giác đều ABC và CDE. M và P tương ứng là trung điểm các đoạn thẳng AD và BE. Tam giác CPM là

(A) Tam giác cân không đều (B) Tam giác vuông cân

(C) Tam giác đều (D) Tam giác vuông không cân

Câu 12: Cho hình vuông ABCD. Trên cạnh BC lấy điểm M không trùng với B, C và trung điểm của BC, trên cạnh CD lấy điểm K không trùng với C, D và trung điểm của CD sao cho $\angle BAM = \angle MAK$ (xem hình vẽ 21)

Thực hiện phép quay tâm A góc -90^0 M biến thành M'

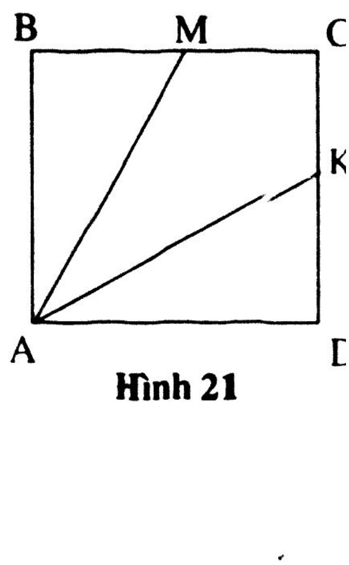
Chọn khẳng định đúng

(A) Tam giác KAM' vuông

(B) Tam giác KAM' đều

(C) Tam giác KAM' cân không đều

(D) Các khẳng định trên đều sai



Hình 21

Câu 13: Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm A(2; 2). Ảnh của A qua phép quay tâm O góc quay 90^0 có toạ độ bao nhiêu?

(A) (2; −2) **(B)** (−2; −2) **(C)** (−2; 2) **(D)** (−2; 0)

Câu 14: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy xét đường thẳng d: $x + y - 2 = 0$. Ảnh của d qua phép quay Q tâm O góc 90^0 là đường thẳng có phương trình:

(A) $x - y + 2 = 0$ **(B)** $x - y - 2 = 0$

(C) $x - y - 4 = 0$ **(D)** $x - y + 4 = 0$

Câu 15: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy xét đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 8 = 0$. Qua phép quay Q tâm O góc -90^0, đường tròn (C) biến thành đường tròn có phương trình:

(A) $x^2 + y^2 + 4x + 4y - 8 = 0$ **(B)** $x^2 + y^2 + 4x - 4y - 8 = 0$

(C) $x^2 + y^2 - 4x + 4y - 8 = 0$ **(D)** $x^2 + y^2 - 4x + 4y - 1 = 0$

Câu 16: Giả sử phép đối xứng tâm $Đ_O$ biến đường thẳng d thành d_1. Trong các khẳng định sau khẳng định nào đúng

(A) d cắt d_1 **(B)** Nếu O ∉ d thì d // d_1

(C) Nếu d qua O thì d cắt d_1 **(D)** d, d_1 cắt nhau tại O

Câu 17: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng khẳng định nào sai?

(A) Hình tròn có vô số tâm đối xứng □ đúng, □ sai

(B) Đường thẳng có vô số tâm đối xứng □ đúng, □ sai

(C) Hình gồm hai đường thẳng cắt nhau có 1 tâm đối xứng □ đúng, □ sai

(D) Hình vuông có hai tâm đối xứng □ đúng, □ sai

Câu 18: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai?

(A) Hình gồm hai đường tròn bằng nhau có hai tâm đối xứng □ đúng, □ sai

(B) Đường elip có một tâm đối xứng □ đúng, □ sai

(C) Đường hypebol có hai tâm đối xứng □ đúng, □ sai

Câu 19: Cho hai điểm A, B phân biệt. Gọi S_A, S_B là phép đối xứng qua A, B. Với điểm M bất kì, gọi $M_1 = S_A(M)$, $M_2 = S_B(M_1)$. Gọi F là phép biến hình biến M thành M_2. Chọn khẳng định dúng

(A) F là phép quay **(B)** F là phép đối xứng trục

(C) F là phép đối xứng tâm **(D)** F là phép tịnh tiến

Câu 20: Cho hai điểm A, B phân biệt. Gọi S_A là phép đối xứng qua A; T là phép tịnh tiến theo vectơ $2\vec{AB}$. Với điểm M bất kì, gọi $M_1 = S_A(M)$, $M_2 = T(M_1)$. Gọi F là phép biến hình biến M thành M_2. Chọn khẳng định đúng

(A) F không là phép dời hình **(B)** F là phép đối xứng trục

(C) F là phép đối xứng tâm **(D)** F là phép tịnh tiến

Câu 21 Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng, mệnh đề nào sai?

(A) Hai hình vuông có cạnh bằng nhau thì hai hình vuông đó bằng nhau

(B) Hai n giác đều có cạnh bằng nhau thì bằng nhau

(C) Hai tứ giác ABCD và $A_1B_1C_1D_1$ có tam giác ABC bằng tam giác $A_1B_1C_1$ bằng nhau, tam giác ACD bằng tam giác $A_1C_1D_1$ thì hai tứ giác ABCD và $A_1B_1C_1D_1$ bằng nhau

Câu 22: Cho hai điểm A, B phân biệt. Gọi S_B là phép đối xứng qua B; T là phép tịnh tiến theo vectơ $2\vec{AB}$. Với điểm M bất kì, gọi $M_1 = T(M)$, $M_2 = S_B(M_1)$. Gọi F là phép biến hình biến M thành M_2. Chọn khẳng định đúng

(A) F không là phép dời hình **(B)** F là phép đối xứng trục

(C) F là phép đối xứng tâm **(D)** F là phép tịnh tiến

Câu 23: Trong hệ toạ độ Oxy cho đường thẳng d: $x + 2y + 1 = 0$ và điểm $I(1; 2)$. Phép đối xứng tâm I biến đường thẳng d thành d'. Phương trình của d' là

(A) $x + 2y - 11 = 0$ **(B)** $x + 2y - 9 = 0$

(C) $2x + y - 11 = 0$ **(D)** $2x + y - 9 = 0$

Câu 24: Trong mặt phẳng Oxy, cho hai đường thẳng a: $x + y - 2 = 0$, b: $x + 2y - 3 = 0$, và điểm $I(2; 2)$. Gọi A, B là hai điểm lần lượt thuộc a, b sao cho A là ảnh của B qua phép đối xứng tâm I. Chọn khẳng định đúng

(A) $A(-5; 7)$; $B(9; -3)$ **(B)** $A(7; -5)$; $B(9; -3)$

(C) $A(-5; 7)$; $B(-3; 3)$ **(D)** $A(7; -5)$; $B(3; 0)$

Câu 25: Trong hệ toạ độ Oxy cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$ và điểm $I(2; 2)$. Gọi (C_1) là ảnh của (C) qua phép đối xứng tâm I. Phương trình của (C') là:

(A) $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 8 = 0$ **(B)** $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$

(C) $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 14 = 0$ **(D)** $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 10 = 0$

TRẢ LỜI

Câu 1:

(A) Khẳng định (A) là đúng, đó phép quay tâm O (là tâm đối xứng) góc quay 180^0

(B) Khẳng định ở (B) là sai

(C) Khẳng định là đúng, ví dụ là phép đồng nhất. Phép đồng nhất là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{0}$, phép đồng nhất cũng là phép quay với góc quay bằng 360^0

(D) Khẳng định (D) là sai

Câu 2:

Các khẳng định ở (A), (B), (C) đều đúng

Đây là kết quả rất quan trọng có nhiều ứng dụng trong giải toán hình học

Chú ý: Nếu $|\varphi| \le 90^0$ thì $\alpha = |\varphi|$

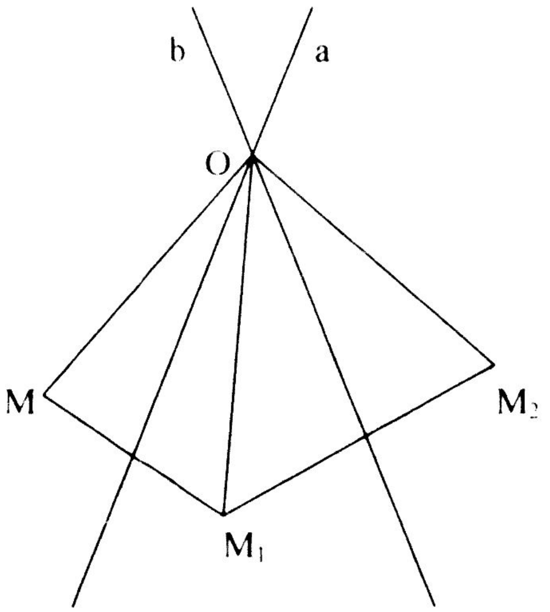
Câu 3:

(A) Khẳng định (A) đúng vì Q là phép dời hình

(B) Khẳng định (B) là sai vì ABC là tam giác tuỳ ý

(C) Theo tính chất của phép quay, nếu M là trực tâm của Δ ABC thì M_1 cũng là trực tâm của $\Delta\ A_1B_1C_1$, vì vậy nếu M_1 là trọng tâm của $\Delta\ A_1B_1C_1$ thì $A_1B_1C_1$ là tam giác đều nên ABC là tam giác đều. Khẳng định ở (C) là đúng

Câu 4



Hình 22

Khẳng định ở (C) là đúng (xem Hình 22)

Câu 5:

(A) Vì Q_1, Q_2 là các phép dời hình nên F là phép dời hình

(B) Theo câu 4, F là phép quay với tâm O và góc quay $(\alpha_1 + \alpha_2)$. Vì vậy F là phép đối xứng tâm nếu $(\alpha_1 + \alpha_2) = 180^0 + k360^0$, khẳng định (B) sai

(C) Nếu $\alpha_1 + \alpha_2 = 360^0$ thì F là phép đồng nhất và vì vậy F là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{0}$

ĐS: (C)

Câu 6: (C)

Câu 7: (A)

Câu 8: (B)

Câu 9: Gọi Q là phép quay tâm O góc quay 90^0

Ta có $Q(A) = B$, $Q(A_1) = B_1$

Nên ΔBOB_1 là ảnh của ΔAOA_1

Vì vậy $I_1 = Q(I)$. Do đó IOI_1 là tam giác vuông cân

ĐS: (B)

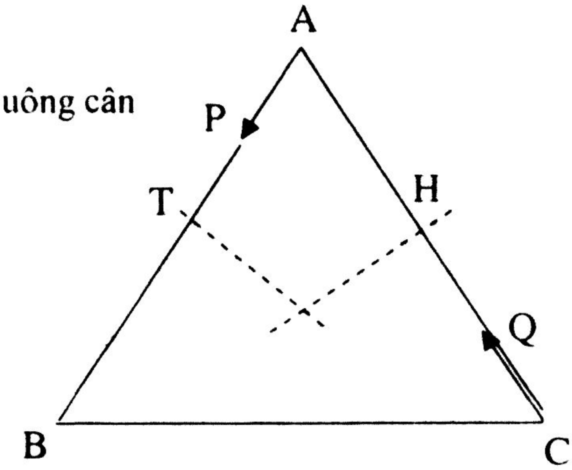
Câu 10: (xem Hình 23)

Ta có: $\angle COA = 120^0$, $OC = OA$

Ta chứng minh $\angle QOP = 120^0$

Rõ ràng hai tam giác vuông QOH và POT bằng nhau nên OP = OQ và $\angle QOH = \angle POT$

Lại do $\angle TOH = 120^0 \Rightarrow \angle QOP = 120^0$



Hình 23

Ta có thể lí luận đơn giản hơn dựa vào tính chất sau đây của phép quay bạn đọc hãy chứng minh, xem như bài tập

Nếu hai vectơ $\overrightarrow{AP}$ và $\overrightarrow{CQ}$ có độ dài bằng nhau và $(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{CQ}) = \alpha$

Thì tồn tại phép quay tâm O góc quay α biến $\overrightarrow{AP}$ thành $\overrightarrow{CQ}$

Trong đó O là giao của hai trong bốn đường sau:

*) Đường trung trực của AC

*) Đường trung trực của PQ

*) Một cung chứa góc $|\alpha|$ giới hạn bởi hai điểm A và C

*) Một cung chứa góc $|\alpha|$ giới hạn bởi hai điểm P và Q

Nếu AP và CQ cắt nhau tại I thì các tứ giác OIAC và OIPQ nội tiếp đường tròn

Trở lại bài toán ta có $(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{CQ}) = -120^0$, AP = CQ

Vậy có phép quay Q góc -120^0 tâm là giao điểm của đường trung trực của AC và cung chứa góc 120^0 nhận AC làm dây vì vậy O chính là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, từ đó ta có $\angle QOP = 120^0$

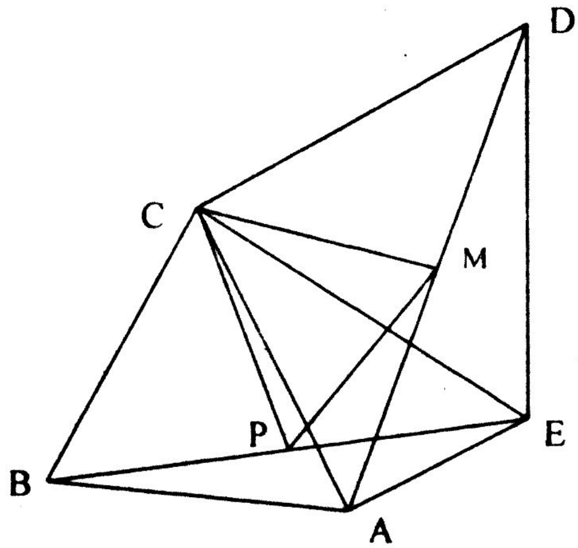
ĐS: (B)

Câu 11: (xem Hình 24)

Xét phép quay góc -60^0 tâm C, biến điểm D thành E, A biến thành B, đoạn thẳng DA biến thành EB, vì vậy M biến thành P

Vậy CPM là tam giác đều

ĐS: (C)



Hình 24

Câu 12: Thực hiện phép quay Q tâm A góc quay -90^0

B biến thành D, M biến thành M'

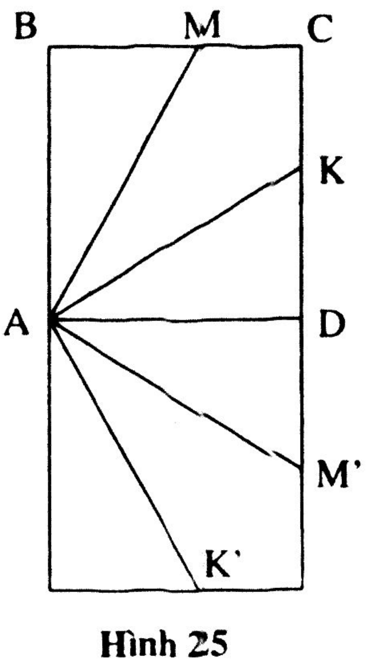
K biến thành K'

Ta chứng minh tam giác KAM' cân tại K

$\angle MAB = \angle M'AD$ (ảnh qua phép quay Q)

Theo giả thiết $\angle BAM = \angle MAK$

Nên $\angle M'AD = \angle MAK \Rightarrow \angle MAD = \angle M'AK$



Hình 25

'ì $\angle MAD = \angle AMB$ (so le)

$\angle AMB = \angle AM'D$ (ảnh qua phép quay Q)

$\Rightarrow \angle M'AK = \angle AM'D$

'ậy tam giác KAM' cân tại K

xem Hình 25)

ĐS: (C)

Câu 13: (C)

Câu 14: Sử dụng tính chất sau:

'hép quay góc α với $0 < \alpha < \pi$, biến đường thẳng d thành đường thẳng d' thì gócgiữa d và d' bằng α (nếu $0 < \alpha \le \frac{\pi}{2}$), hoặc bằng $\pi - \alpha$ (nếu $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$)

.ấy $M(2; 0) \in d$. Gọi $M' = Q(M) \Rightarrow M'(0; 2)$

ı là đường thẳng qua M' và vuông góc với d, vậy phương trình của d' là:

$1(x - 0) - 1(y - 2) = 0 \Leftrightarrow x - y + 2 = 0$

ĐS: (A)

Câu 15: (C) có tâm I(2; 2) và bán kính R = 4

Gọi $I_1 = Q(I) \Rightarrow I_1(2; -2)$

Gọi (C_1) là ảnh của (C) qua Q thì (C_1) có tâm I_1 và bán kính R = 4, vậy

(C_1): $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 16 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x + 4y - 8 = 0$

ĐS: (C)

Câu 16: Khẳng định (B) đúng

Câu 17:

(A) Hình tròn có một tâm đối xứng là tâm của nó. Khẳng định ở (A) là sai

(B) Đường thẳng có vô số tâm đối xứng là các điểm thuộc đường thẳng, khẳng định ở (B) là đúng

(C) Hình gồm hai đường thẳng cắt nhau có 1 tâm đối xứng đó là giao điểm của hai đường thẳng đó, khẳng định ở (C) đúng

(D) Hình vuông có một tâm đối xứng đó là giao điểm của hai đường chéo, khẳng định ở (D) sai

Câu 18:

(A) Hình gồm hai đường tròn bằng nhau có một tâm đối xứng

Khẳng định (A) sai

(B) Đường elip có một tâm đối xứng

Khẳng định (B) đúng

(C) Đường hypebol có một tâm đối xứng

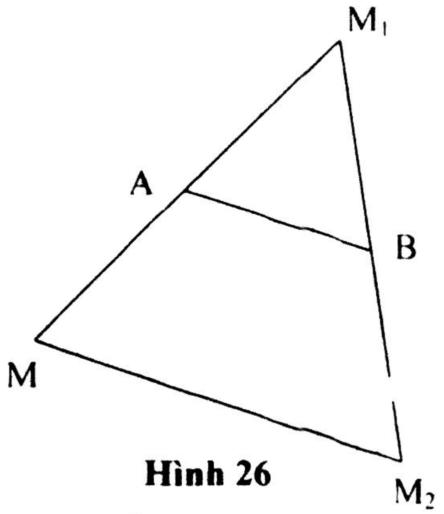
Khẳng định (C) sai

Câu 19: (xem Hình 26)

Ta có:

$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AM_1}$; $\overrightarrow{M_1B} = \overrightarrow{BM_2}$

$$\overrightarrow{MM_2} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AM_1} + \overrightarrow{M_1B} + \overrightarrow{BM_2}$$
$$= \overrightarrow{AM_1} + \overrightarrow{AM_1} + \overrightarrow{M_1B} + \overrightarrow{M_1B}$$
$$= 2\overrightarrow{AM_1} + 2\overrightarrow{M_1B}$$
$$= 2(\overrightarrow{AM_1} + \overrightarrow{M_1B}) = 2\overrightarrow{AB}$$



Hình 26

Vậy F là phép tịnh tiến theo vectơ $2\overrightarrow{AB}$

ĐS: (D)

(Có thể sử dụng tính chất đường trung bình của tam giác để giải bài này)

Câu 20: Ta dùng phương pháp toạ độ để giải bài toán này

Trong mặt phẳng Oxy gọi $A(x_0; y_0)$, $B(x_1; y_1)$, $M(x; y)$

$\Rightarrow M_1(2x_0 - x; 2y_0 - y)$

Lại do $2\overrightarrow{AB} = (2(x_1 - x_0), 2(y_1 - y_0))$ nên $M_2(2x_1 - x; 2y_1 - y)$

Vậy F là phép đối xứng qua tâm B

ĐS: (C)

Câu 21: Các khẳng định (A), (B), (C) đều đúng

Câu 22: (C)

Câu 23: Gọi $M(-1; 0) \in d$, M' đối xứng với M qua I $\Rightarrow M'(3; 4)$

d' đi qua M' và song song với d, nên có phương trình:

$$1(x - 3) + 2(y - 4) = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 11 = 0$$

ĐS: (A)

Có thể giải gọn hơn như sau:

$M(x; y) \in d$, $M'(x'; y')$ là điểm đối xứng với M qua I, ta có:

$$\begin{cases} x' = 2 - x \\ y' = 4 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - x' \\ y = 4 - y' \end{cases}$$

$M(x; y) \in d \Leftrightarrow x + 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow (2 - x') + 2(4 - y') + 1 = 0$

$\Leftrightarrow x' + 2y' - 11 = 0 \Leftrightarrow M'$ thuộc đường thẳng d': $x + 2y - 11 = 0$

Vậy phương trình của d' là: $x + 2y - 11 = 0$

Câu 24:

$A \in a \Rightarrow A(t; 2 - t)$

$B \in b \Rightarrow B(3 - 2t_1; t_1)$

I là trung điểm của AB, ta có:

$$\begin{cases} t + (3 - 2t_1) = 4 \\ (2 - t) + t_1 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t - 2t_1 = 1 \\ t - t_1 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -5 \\ t_1 = -3 \end{cases}$$

Vậy $A(-5; 7)$; $B(9; -3)$

ĐS: (A)

Câu 25:

(C) có tâm J(1; 1) bán kính R = 2

Qua phép đối xứng tâm I, J biến thành $J_1(3; 3)$

Vậy phương trình của (C_1):

$$(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 6x - 6y + 14 = 0$$

Có thể giải cách khác như sau:

M(x; y) ∈ d, M(x'; y') là điểm đối xứng với M qua I, ta có:

$$\begin{cases} x' = 4 - x \\ y' = 4 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 - x' \\ y = 4 - y' \end{cases}$$

$M(x; y) \in (C) \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$

$\Leftrightarrow (4 - x')^2 + (4 - y')^2 - 2(4 - x') - 2(4 - y') - 2 = 0$

$\Leftrightarrow x'^2 + y'^2 - 6x' - 6y' + 14 = 0$

$\Leftrightarrow$ M' thuộc đường tròn (C_1) có phương trình: $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 14 = 0$

ĐS: (D)

§5. PHÉP VỊ TỰ

TÓM TẮT LÍ THUYẾT

I. Định nghĩa: Cho một điểm O cố định và một số k không đổi, $k \neq 0$. Phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$ được gọi là phép vị tự tâm O tỉ số k và kí hiệu V(O; k)

II. Các tính chất:

1. Nếu phép vị tự biến hai điểm M, N lần lượt thành M', N' thì $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$

2. Phép vị tự biến ba điểm thẳng hàng thành 3 điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự của ba điểm thẳng hàng đó

3. Phép vị tự tỉ số k biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với đường thẳng đó, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng mà độ dài được nhân lên với $|k|$, biến tam giác thành tam giác đồng dạng với tỉ số đồng dạng $|k|$, biến góc thành góc bằng nó, biến đường tròn thành đường tròn

III. Tâm vị tự của hai đường tròn

Cho hai đường tròn (I; R) và (I'; R'), ta tìm những phép vị tự biến đường tròn (I; R) thành đường tròn (I'; R'),

TH1: $I \equiv I'$

Có hai phép vị tự $V(I; \frac{R'}{R})$ và $V(I; -\frac{R'}{R})$

TH2: I không trùng I' nhưng R = R'

Có một phép vị tự tâm O là trung điểm của I I' tỉ số bằng –1

TH3: I không trùng với I' và R khác R'

Có hai phép vị tự $V(O_1; \frac{R'}{R})$ và $V(O_2; -\frac{R'}{R})$

Trong đó $\overrightarrow{O_1I} = \frac{R}{R'}\overrightarrow{O_1I'}$ và $\overrightarrow{O_2I} = -\frac{R}{R'}\overrightarrow{O_2I'}$

CÁC DẠNG TOÁN CƠ BẢN

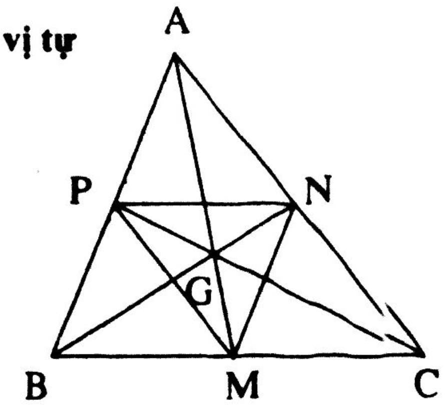
I. Dạng toán 1: Xác định ảnh của hình H qua phép vị tự

VD1: Tam giác ABC có trọng tâm G. Xác định ảnh của tam giác ABC qua phép vị tự tâm G tỉ số $-\frac{1}{2}$

Giải

Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB

Theo tính chất của trọng tâm ta có: (xem Hình 27)



Hình 27

$\overrightarrow{GM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}$

$\overrightarrow{GN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GB}$

$\overrightarrow{GP} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GC}$

Vậy qua phép vị tự tâm G tỉ số $-\frac{1}{2}$, ảnh của tam giác ABC là tam giác MNP

VD2: Trong mặt phẳng Oxy cho điểm I(1; 2), M(2; 3), đường thẳng d: x − 2y + 1 = 0

a) Xác định ảnh của M qua phép vị tự V_1 tâm O tỉ số $k_1 = -2$

b) Xác định ảnh của M qua phép vị tự V_2 tâm I tỉ số $k_2 = 2$

c) Xác định ảnh của đường thẳng d qua V_1

Giải

a) Gọi $M'(x'; y') = V_1(M)$, ta có $\overrightarrow{OM'} = k_1\overrightarrow{OM} \Leftrightarrow x' = -2.2 = -4,\ y' = -2.3 = -6$

Vậy $M'(-4; -6)$

b) Gọi $M_1(x_1; y_1) = V_2(M)$, ta có $\overrightarrow{IM_1} = k_2\overrightarrow{IM}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 1 = 2(2-1) \\ y_1 - 2 = 2(3-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ y_1 = 4 \end{cases}$$

Vậy $M_1(3; 4)$

c) N(x; y), gọi $N'(x'; y') = V_1(N)$, ta có

$$\overrightarrow{ON'} = k_1\overrightarrow{ON} = -2\overrightarrow{ON} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -2x \\ y' = -2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{x'}{2} \\ y = -\frac{y'}{2} \end{cases}$$

N thuộc d $\Leftrightarrow x - 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow (-\frac{x'}{2}) - 2(-\frac{y'}{2}) + 1 = 0 \Leftrightarrow -x' + 2y' + 2 = 0$

$\Leftrightarrow$ N thuộc đường thẳng d': −x + 2y + 2 = 0

Vậy ảnh của d qua V_1 là đường thẳng d': −x + 2y + 2 = 0

II. Dạng toán 2: Tìm tâm vị tự của hai đường tròn

VD: Trong mặt phẳng Oxy, cho hai đường tròn

(C): $x^2 + y^2 - 2x - 15 = 0$

(C_1): $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0$

Tìm tọa độ tâm vị tự ngoài J, tâm vị tự trong K của (C) và (C_1)

Giải

(C) có tâm I (1; 0) bán kính R = 4

(C_1) có tâm $I_1(3; 1)$ bán kính $R_1 = 2$

Tâm vị tự ngoài $J(x_0; y_0)$ thoả mãn $\vec{IJ} = \frac{R}{R_1}\vec{I_1J} = 2\vec{I_1J}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0 - 1 = 2(x_0 - 3) \\ y_0 - 0 = 2(y_0 - 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 5 \\ y_0 = 2 \end{cases}$$

Vậy J(5; 2)

Tâm vị tự trong $K(x_1; y_1)$ thoả mãn $\vec{IJ} = -\frac{R}{R_1}\vec{I_1J} = -2\vec{I_1J}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 - 1 = -2(x_1 - 3) \\ y_1 - 0 = -2(y_1 - 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{7}{3} \\ y_1 = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Vậy $K(\frac{7}{3}; \frac{2}{3})$

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai?

(A) Phép đối xứng tâm là một phép vị tự ☐ đúng, ☐ sai

(B) Phép đối xứng trục là một phép vị tự ☐ đúng, ☐ sai

(C) Phép đồng nhất là một phép vị tự ☐ đúng, ☐ sai

(D) Phép tịnh tiến theo vectơ khác $\vec{0}$ là một phép vị tự ☐ đúng, ☐ sai

Câu 2: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng khẳng định nào sai ?

(A) Phép vị tự luôn có điểm bất động ☐ đúng, ☐ sai

(B) Mọi phép vị tự không thể có quá một điểm bất động ☐ đúng, ☐ sai

(C) Nếu phép vị tự có hai điểm bất động thì mọi điểm đều bất động ☐ đúng, ☐ sai

Câu 3: Cho phép vị tự V tâm O thi số $k \neq 1$. Trong các khẳng định sau khẳng định nào đúng ?

(A) V là một phép dời hình

(B) Mọi đường tâm O đều biến thành chính nó qua V

(C) Qua V mọi đường tròn qua O đều biến thành đường tròn bằng nó

(D) Các khẳng định ở (A), (B), (C) đều sai

Câu 4: Cho tam giác ABC. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và AC. Phép vị tự tâm A biến tam giác ABC thành tam giác AMN có tỉ số bằng bao nhiêu?

(A) $-\frac{1}{2}$ **(B)** $\frac{1}{2}$ **(C)** 2 **(D)** -2

Câu 5: Cho hai điểm O, I. Xét phép vị tự V tâm I tỉ số $k \neq 1$ và phép tịnh tiến T theo vectơ $\vec{u} = (1 - k)\vec{IO}$. Lấy điểm M bất kì, $M_1 = V(M)$, $M_2 = T(M_1)$. Xét phép biến hình F biến M thành M_2. Chọn khẳng định đúng

(A) F là phép vị tự tỉ số 1 – k (B) F là phép vị tự tỉ số k

(C) F là phép vị tự tỉ số $\frac{1}{k}$ (D) F là phép vị tự tỉ số $-\frac{1}{k}$

Câu 6 Cho tam giác ABC có trọng tâm G, M là trung điểm của BC. Phép vị tự tâm A biến G thành M có tỉ số bằng

(A) $\frac{2}{3}$ (B) $-\frac{2}{3}$ (C) $\frac{3}{2}$ (D) $-\frac{3}{2}$

Câu 7: Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạn AB, BC, CA. Phép vị tự nào sau đây biến tam giác ABC thành NPM

(A) Phép vị tự tâm A tỉ số $-\frac{1}{2}$ (B) Phép vị tự tâm M tỉ số $\frac{1}{2}$

(C) Phép vị tự tâm G tỉ số –2 (D) Phép vị tự tâm G tỉ số $-\frac{1}{2}$

Câu 8: Cho đường tròn tâm O và hai đường kính AA' và BB' vuông góc nhau. M là điểm bt kì trên đường kính BB'; M' là hình chiếu vuông góc của M xuống tiếp tuyến với đường tròn tại A, I là giao điểm của AM và A'M'. I là ảnh của M trong phép vtự tâm A tỉ số bằng bao nhiêu?

(A) $\frac{2}{3}$ (B) $-\frac{2}{3}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $-\frac{1}{3}$

Câu 9: Trong mặt phẳng Oxy, xét phép vị tự V tâm O tỉ số k. Với điểm M(x; y), gọi M_1 = V(M). Chọn khẳng định đúng

(A) $M_1(-kx; -ky)$ (B) $M_1(\frac{x}{k}; \frac{y}{k})$

(C) $M_1(-\frac{x}{k}; -\frac{y}{k})$ (D) $M_1(kx; ky)$

Câu 10 Trong mặt phẳng Oxy cho I(a; b). Xét phép vị tự V tâm I tỉ số k. Gọi M(x; y) và M_1 = V(M). Toạ độ của M_1 là

(A) kx + (1 – k)a; ky + (1 – k)b) (B) (kx + (1 + k)a; ky + (1 + k)b)

(C) kx – (1 – k)a; ky – (1 – k)b) (D) (ky + (1 – k)a; kx + (1 – k)b)

Câu 11 Trong mặt phẳng Oxy cho I(1; 1). Xét phép vị tự V tâm I tỉ số k = 3. d là đường thẳng có phương trình x + 2y = 0, d' = V(d). Phương trình của d' là:

(A) x + 2y + 2 = 0 (B) x + 2y + 4 = 0

(C) x + 2y + 6 = 0 (D) x + 2y + 8 = 0

Câu 12 Trong mặt phẳng Oxy cho I(1; 2). Xét phép vị tự V tâm I tỉ số k = 2. (C) là đường tròn có phương trình: $x^2 + y^2 = 4$. (C_1) = V((C)). Phương trình của (C_1) là:

(A) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 16$ (B) $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 16$

(C) $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 16$ (D) $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 16$

Câu 13: Trong các khẳng định sau đây khẳng định nào đúng khẳng định nào sai

(A) Cho hai đường tròn đồng tâm. Có bốn phép vị tự biến đường tròn này thành đường tròn kia đúng, sai

(B) Hai đường tròn có hai tâm phân biệt nhưng bán kính bằng nhau có hai tâm vị tự đúng, sai

(C) Hai đường tròn khác tâm và bán kính không bằng nhau có hai tâm vị tự đúng, sai

Câu 14: Trong mặt phẳng Oxy, cho hai đường tròn

$(C): x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$

$(C_1): x^2 + y^2 - 10x + 21 = 0$

Trong các khẳng định sau khẳng định nào đúng?

(A) Hai đường tròn (C_1) và (C) có 2 tâm vị tự

(B) Hai đường tròn (C) và (C_1) có một tâm vị tự

(C) Hai đường tròn (C) và (C_1) có vô số tâm vị tự

(D) Hai đường tròn (C) và (C_1) có 4 tâm vị tự

Câu 15: Trong mặt phẳng Oxy, cho hai đường tròn

$(C): x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$

$(C_1): x^2 + y^2 - 6x + 2y + 1 = 0$

Tâm vị tự ngoài J, tâm vị tự trong K của (C) và (C_1) là

(A) $J(-3; 2), K(\frac{9}{5}; -\frac{2}{5})$ **(B)** $J(-3; 2), K(-\frac{9}{5}; \frac{2}{5})$

(C) $J(2; -3), K(\frac{9}{5}; -\frac{2}{5})$ **(D)** $J(2; -3), J(-\frac{9}{5}; \frac{2}{5})$

Câu 16: Trong mặt phẳng cho hai đường tròn

$(C): x^2 + y^2 = 4; (C_1): x^2 + y^2 - 4x - 4y - 8 = 0$

Phương trình các tiếp tuyến chung của hai đường tròn trên là

(A) $x + 2 = 0, y + 1 = 0$ **(B)** $x + 2 = 0, y + 2 = 0$

(C) $x + 1 = 0, y + 1 = 0$ **(D)** $x + 1 = 0, y + 2 = 0$

TRẢ LỜI

Câu 1:

(A) Phép đối xứng tâm là một phép vị tự với tỉ số -1, khẳng định (A) đúngg

(B) Khẳng định (B) sai

(C) Phép đồng nhất là một phép vị tự với tỉ số 1, khẳng định (C) đúng

(D) Phép tịnh tiến theo vectơ khác $\vec{0}$ không là một phép vị tự, khẳng định (D) sai

Câu 2:

(A) Phép vị tự luôn có một điểm bất động là tâm vị tự, khẳng định (A) đúng

(B) Phép vị tự tỉ số 1 có mọi điểm là bất động

Khẳng định (B) là sai.

(C) Khẳng định (C) là đúng

Câu 3:

(A) Phép vị tự là phép dời hình khi tỉ số $k = \pm 1$, khẳng định ở (A) là sai

(B) Khẳng định (B) sai

(C) Khẳng định (C) sai

ĐS: (D)

Câu 4: Vì $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

Phép vị tự cần tìm có tỉ số $\frac{1}{2}$

ĐS: (B)

Câu 5:

Vì $\overrightarrow{OM_2} = k\overrightarrow{OM} \Leftrightarrow \overrightarrow{IM_2} - \overrightarrow{IO} = k(\overrightarrow{IM} - \overrightarrow{IO}) \Leftrightarrow \overrightarrow{IM_2} = k\overrightarrow{IM} + (1-k)\overrightarrow{IO}$ (*)

Theo định nghĩa ta có:

$\overrightarrow{IM_1} = k\overrightarrow{IM}$ (1)

$\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{u} = (1-k)\overrightarrow{IO} \Rightarrow \overrightarrow{IM_2} - \overrightarrow{IM_1} = (1-k)\overrightarrow{IO}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{IM_2} = \overrightarrow{IM_1} + (1-k)\overrightarrow{IO}$ (2)

Thế (1) vào (2) ta có: $\overrightarrow{IM_2} = k\overrightarrow{IM} + (1-k)\overrightarrow{IO}$

Và theo (*) ta có $\overrightarrow{OM_2} = k\overrightarrow{OM}$

Vậy F là phép vị tự tâm O tỉ số k.

ĐS: (B)

Câu 6: Vì $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AG}$

Vậy phép vị tự tâm A tỉ số $\frac{3}{2}$ biến G thành M.

ĐS: (C)

Câu 7: (xem Hình 28)

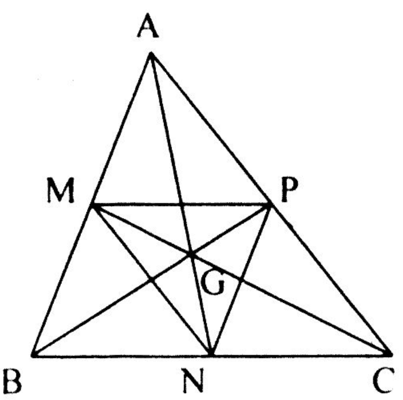
Từ các đẳng thức vectơ:

$\overrightarrow{GM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GC}$, $\overrightarrow{GP} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GB}$

$\overrightarrow{GN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}$

Vậy Phép vị tự tâm G tỉ số $-\frac{1}{2}$ biến tam giác ABC thành NPM

ĐS: (D)



Hình 28

Câu 8:

$$\frac{AI}{IM} = \frac{MM'}{AA'} = 2$$

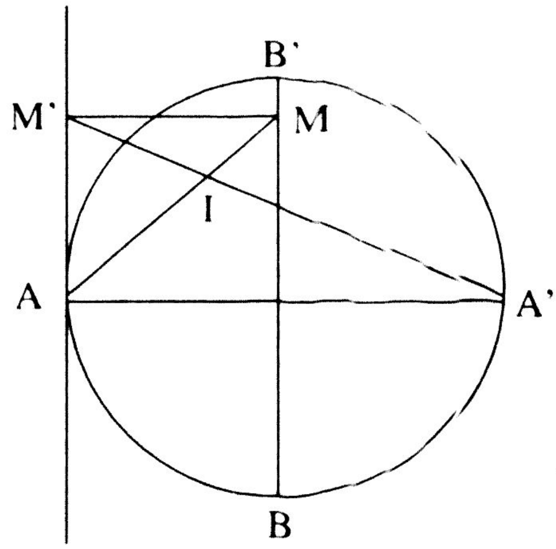
$$\Rightarrow \frac{AI}{IM + AI} = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$$

Vậy I là ảnh của M trong phép vị tự tâm A tỉ số bằng $\frac{2}{3}$

ĐS: (A)

(xem Hình 29)



Hình 29

Câu 9: Theo định nghĩa

$$\overrightarrow{OM_1} = k\overrightarrow{OM}$$

Lại do $k\overrightarrow{OM} = (kx; ky)$; Toạ độ $\overrightarrow{OM_1}$ là toạ độ của M_1, vì vậy $M_1(k.x; ky)$

ĐS: (D)

Câu 10: Gọi $M_1(x_1; y_1)$

Theo định nghĩa:

$$\overrightarrow{IM_1} = k\overrightarrow{IM} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - a = k(x-a) \\ y_1 - b = k(y-b) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = kx + (1-k)a \\ y_1 = ky + (1-k)b \end{cases}$$

ĐS: (A)

Câu 11: Nhận xét $O(0; 0) \in d$. Gọi $O_1 = V(O)$

Theo câu 10 ta có: $O_1(-2; -2)$

d' là đường thẳng qua O_1 và song song với d. Phương trình của d':

$1(x + 2) + 2(y + 2) = 0 \Leftrightarrow x + 2y + 6 = 0$

ĐS: (C)

Có thể giải cách khác như sau:

Với mọi điểm $M(x; y)$, gọi $M'(x'; y') = V(M)$, theo câu trắc nghiệm 10 ta có

$$\begin{cases} x' = 2x - 2 \\ y' = 2y - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{x'+2}{2} \\ y = \dfrac{y'+2}{2} \end{cases}$$

M thuộc d $\Leftrightarrow x + 2y = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x'+2}{2} + 2\dfrac{y'+2}{2} = 0 \Leftrightarrow x' + 2y' + 6 = 0$

$\Leftrightarrow$ M' thuộc d': $x + 2y + 6 = 0$

Câu 12:

(C) có tâm $O(0; 0)$ bán kính $R = 2$. Gọi $O_1 = V(O)$

Theo câu 10: $O_1(-1; -2)$

(C_1) là đường tròn có tâm O_1 và có bán kính $R = 2.2 = 4$

$\Rightarrow (C_1): (x+1)^2 + (y+2)^2 = 16$

ĐS: (B)

Câu 13:

(A) Khẳng định (A) đúng

(B) Khẳng định (B) sai. Hai đường tròn có hai tâm phân biệt nhưng có bán kính bằng nhau có một tâm vị tự

(C) Khẳng định (C) đúng

Câu 14:

(C) có tâm $I(1; 0)$ bán kính $R = 2$

(C_1) có tâm $I_1(5; 0)$ bán kính $R_1 = 2$

Hai đường tròn có cùng bán kính

Vậy (C) và (C_1) có một tâm vị tự

ĐS: (B)

Câu 15:

(C) có tâm $I(1; 0)$ bán kính $R = 2$

(C_1) có tâm $I_1(3; -1)$ bán kính $R_1 = 3$

Tâm vị tự ngoài J thoả mãn $\overrightarrow{JI} = \frac{R}{R_1}\overrightarrow{JI_1} = \frac{2}{3}\overrightarrow{JI_1}$, vậy

$$\begin{cases} x_J = \dfrac{1 - \frac{2}{3}.3}{1 - \frac{2}{3}} = -3 \\ y_J = \dfrac{0 - \frac{2}{3}(-1)}{1 - \frac{2}{3}} = 2 \end{cases} \Rightarrow J(-3; 2)$$

Tâm vị tự trong K thoả mãn $\overrightarrow{KI} = -\frac{R}{R_1}\overrightarrow{KI_1} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{KI_1}$, vậy

$$\begin{cases} x_J = \dfrac{1 + \frac{2}{3}.3}{1 + \frac{2}{3}} = \dfrac{9}{5} \\ y_J = \dfrac{0 + \frac{2}{3}(-1)}{1 + \frac{2}{3}} = -\dfrac{2}{5} \end{cases} \Rightarrow K(\frac{9}{5}; -\frac{2}{5})$$

ĐS: (A)

Câu 16:

(C) có tâm O(0; 0) bán kính R = 2

(C_1) có tâm I(2; 2) bán kính $R_1 = 4$

Ta có: $OI = 2\sqrt{2}$, nên

$R_1 - R < OI < R_1 + R$

Vì vậy (C) và (C_1) cắt nhau do đó chúng có 2 tiếp tuyến chung ngoài d đi qua tâm vị tự ngoài J

$$\text{Vì } \overrightarrow{JI} = \frac{R_1}{R}\overrightarrow{JO} \Rightarrow \begin{cases} x_j = \dfrac{2}{1-2} = -2 \\ y_j = \dfrac{2}{1-2} = -2 \end{cases} \Rightarrow J(-2; -2)$$

d đi qua J nên có phương trình dạng:

$A(x + 2) + B(y + 2) = 0 \Leftrightarrow Ax + By + 2A + 2B = 0\ (A^2 + B^2 > 0)$

d tiếp xúc với (C) $\Leftrightarrow d(O; d) = R \Leftrightarrow \dfrac{|2A + 2B|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 2$

$\Leftrightarrow |A + B| = \sqrt{A^2 + B^2} \Leftrightarrow AB = 0 \Leftrightarrow A = 0$ hoặc $B = 0$

- A = 0 chọn B = 1: d: y + 2 = 0
- B = 0 chọn A = 1: d: x + 2 = 0

ĐS: (B)

§6. PHÉP ĐỒNG DẠNG

TÓM TẮT LÍ THUYẾT

I. Định nghĩa:

1. Phép biến hình F gọi là phép đồng dạng với tỉ số k ($k > 0$) nếu với hai điểm bất kì M, N và ảnh M', N' của chúng ta luôn có $M'N' = kMN$

2. Hai hình được gọi là đồng dạng nếu có phép đồng dạng biến hình này thành hình kia

II. Tính chất

1. Mọi phép đồng dạng F tỉ số $k > 0$ đều là hợp thành của một phép vị tự V tỉ số k và một phép dời hình D

2. Phép đồng dạng biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự của ba điểm đó, biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng mà độ dài được nhân lên với tỉ số đồng dạng k, biến một góc thành một góc bằng nó

CÁC DẠNG TOÁN CƠ BẢN

I. Dạng toán 1: Xác định ảnh của một hình qua phép đồng dạng

Phương pháp: Sử dụng định nghĩa và tính chất của phép đồng dạng

VD: Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$. Gọi (C') là ảnh của (C) qua phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép quay tâm O góc 45^0 và phép vị tự tâm O tỉ số $\sqrt{2}$. Xác định phương trình của (C')

Giải

(C) có tâm $I(1; 1)$ và bán kính $R = 2$.

Vì I thuộc đường phân giác của góc phần tư thứ nhất, nên ảnh của I qua phép quay góc 45^0 là $I_1(0; \sqrt{2})$

Qua phép vị tự tâm O tỉ số $\sqrt{2}$ điểm I_1 biến thành $I_2(0; 2)$

Vậy qua phép đồng dạng nói trên biến đường tròn (C) thành đường tròn (C') có tâm I_2 và bán kính $R_2 = 2\sqrt{2}$

Vậy (C'): $(x - 0)^2 + (y - 2)^2 = 8 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4y - 4 = 0$

II. Dạng toán 2: Tìm phép đồng dạng biến hình H thành hình H'

Phương pháp: Tìm cách biểu thị phép đồng dạng đó bằng cách thực hiện liên tiếp các phép đồng dạng

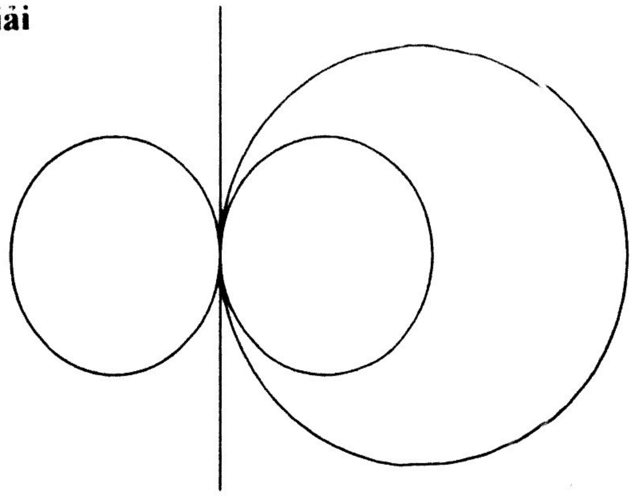
VD: Cho hai đường tròn (I; R) và (I'; 2R) tiếp xúc ngoài nhau tại O, d là đường thẳng tiếp xúc với hai đường tròn tại O. Gọi V là phép vị tự tâm O tỉ số k, Đ là phép đối xứng qua đường thẳng d, F là phép hợp thành của Đ và V. Với giá trị k bằng bao nhiêu thì F biến (I; R) thành (I'; 2R)?

Giải

Qua phép đối xứng Đ trục d đường tròn (I) biến thành (I_1)

Qua phép tịnh tiến V tỉ số 2 đường tròn (I_1) biến thành đường tròn (I')

Vậy k = 2



Hình 30

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Các khẳng định sau đây, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai?

(A) Phép dời hình là phép đồng dạng với tỉ số bằng -1 ☐ đúng, ☐ sai

(B) Phép vị tự tỉ số k là một phép đồng dạng với tỉ số $-k$ ☐ đúng, ☐ sai

(C) Phép vị tự với tỉ số $k \neq 0$ là một phép đồng dạng với tỉ số $|k|$ ☐ đúng, ☐ sai

Câu 2: Các khẳng định sau đây, khẳng định nào đúng khẳng định nào sai?

(A) Mọi phép đồng dạng đều biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó ☐ đúng, ☐ sai

(B) Mọi phép đồng dạng biến hình vuông thành hình vuông ☐ đúng, ☐ sai

(C) Tồn tại phép đồng dạng biến hình chữ nhật (không phải là hình vuông) thành hình vuông ☐ đúng, ☐ sai

Câu 3: Giả sử phép đồng dạng F biến tam giác ABC thành tam giác $A_1B_1C_1$. Giả sử F biến trung tuyến AM của tam giác ABC thành đường cao A_1M_1 của tam giác $A_1B_1C_1$. Khẳng định sau đây, khẳng định nào đúng?

(A) Tam giác $A_1B_1C_1$ là tam giác đều

(B) Tam giác ABC là tam giác cân

(C) Tam giác $A_1B_1C_1$ là tam giác vuông tại B_1

(D) Tam giác $A_1B_1C_1$ là tam giác vuông tại C_1

Câu 4: Cho hình chữ nhật ABDC với AC = 2AB. Gọi Q là phép quay tâm A góc quay $\varphi = (AB, AC)$, V là phép vị tự tâm A tỉ số 2, F là phép hợp thành của V và Q. F biến đường tròn tâm B bán kính BA thành đường đường nào sau đây?

(A) Đường tròn tâm D bán kính DB (B) Đường tròn tâm C bán kính CA

(C) Đường tròn tâm D bán kính DC (D) Đường tròn tâm A bán kính AC

Câu 5: Cho hai đường tròn (I; R) và (I'; 2R) tiếp xúc ngoài nhau tại O, d là đường thẳng tiếp xúc với hai đường tròn tại O. Gọi V là phép vị tự tâm O tỉ số k, Đ là phép đối xứng qua đường thẳng d, F là phép hợp thành của Đ và V. Với giá trị k bằng bao nhiêu thì F biến (I; R) thành (I'; 2R)?

(A) $k = 2$ (B) $k = -2$ (C) $k = -\frac{1}{2}$ (D) $k = \frac{1}{2}$

Câu 6: Trong các khẳng định sau đây khẳng định nào đúng khẳng định nào sai?

(A) Hai hình vuông đều đồng dạng nhau đúng, sai

(B) Bất cứ hai tam giác cân nào cũng đồng dạng nhau đúng, sai

(C) Bất cứ hai hình chữ nhật nào cũng đồng dạng nhau đúng, sai

(D) Hai đoạn thẳng bất kì luôn đồng dạng nhau đúng, sai

Câu 7: Cho hình chữ nhật ABCD có tâm I. Gọi H, K, L, J lần lượt là trung điểm của AD, BC, KC, IC. Tứ giác IHDC đồng dạng với tứ giác nào sau đây?

(A) JLKI **(B)** ILJH **(C)** JLBA **(D)**ALJH

Câu 8: Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$. Gọi (C') là ảnh của (C) qua phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép quay tâm O góc 45^0 và phép vị tự tâm O tỉ số $\sqrt{2}$. Phương trình của (C') là

(A) $x^2 + y^2 - 4y - 4 = 0$ **(B)** $x^2 + y^2 + 4y - 4 = 0$

(C) $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 4 = 0$ **(D)** $x^2 + y^2 - 4x - 4y = 0$

Câu 9: Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$. Gọi (C') là ảnh của (C) qua phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép quay tâm O góc 90^0 và phép vị tự tâm O tỉ số -2. Phương trình của (C') là

(A) $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 8 = 0$ **(B)** $x^2 + y^2 - 4x + 4y - 8 = 0$

(C) $x^2 + y^2 + 4x - 4y - 8 = 0$ **(D)** $x^2 + y^2 + 4x + 4y - 8 = 0$

TRẢ LỜI

Câu 1:

(A) Khẳng định sai vì trong định nghĩa, tỉ số đồng dạng phải dương

(B) Khẳng định sai cho trường hợp k > 0

(C) Khẳng định đúng

Câu 2:

(A) Khẳng định sai

(B) Khẳng định đúng

(C) Khẳng định sai

Câu 3: Theo tính chất của phép đồng dạng thì A_1M_1 là đường trung tuyến của tam giác $A_1B_1C_1$, theo giả thiết A_1M_1 lại là đường cao nên $A_1B_1C_1$ là tam giác cân tại A_1 và vì vậy ABC cân tại A

ĐS: (B)

Câu 4:

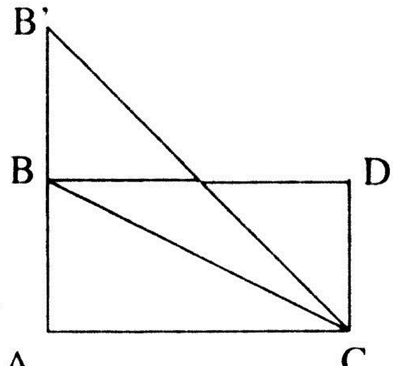
$V(B) = B_1$ (xem Hình 31)

$Q(B_1) = C$

Qua V đường tròn tâm B bán kính BA biến thành đường tròn tâm B_1 bán kính B_1A

Qua Q đường tròn tâm B_1 bán kính B_1A biến thành đường tròn tâm C bán kính CA

ĐS: (B)



Hình 31

Câu 5: k = 2. ĐS: a

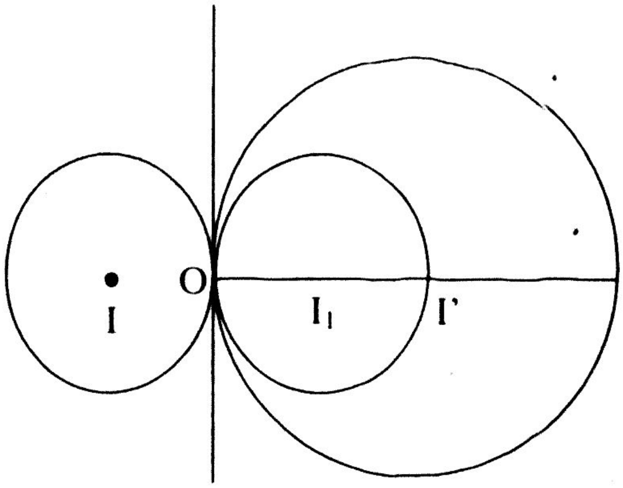
Qua phép đối xứng Đ trục d đường tròn (I) biến thành (I_1)

Qua phép tịnh tiến V tỉ số 2 (I_1) biến thành (I')

Vậy k = 2

ĐS: (A)

(xem Hình 32)



Hình 32

Câu 6:

(A) Khẳng định ở (A) đúng.

Ta có kết luận tổng quát sau:

Mọi đa giác đều có cùng số cạnh đều đồng dạng nhau

(B) Khẳng định sai, ví dụ tam giác đều không thể đồng dạng với tam giác vuông cân

(C) Khẳng định sai

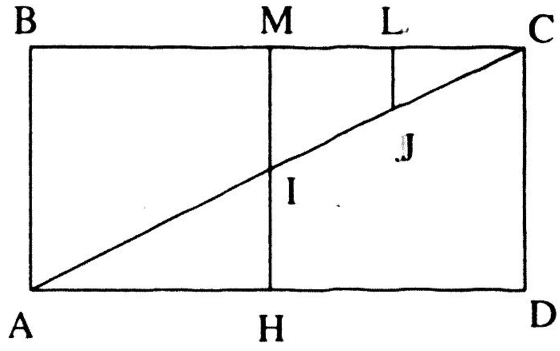
(D) Khẳng định đúng

Câu 7: (xem Hình 33)

Chú ý rằng tứ giác IHDC là hình thang vuông, vì vậy chỉ có thể đồng dạng với JLKI, JLBA

Kiểm tra ta thấy IHDC, đồng dạng với JLKI theo tỉ số đồng dạng $\frac{1}{2}$

ĐS: (A)



Hình 33

Câu 8: (C) có tâm I(1; 1) và bán kính R = 2.

Vì I thuộc đường phân giác của góc phần tư thứ nhất, nên ảnh của I qua phép quay góc 45^0 là $I_1(0; \sqrt{2})$

Qua phép vị tự tâm O tỉ số $\sqrt{2}$ điểm I_1 biến thành $I_2(0; 2)$

Vậy qua phép dời hình nói trên đường tròn (C) biến thành đường tròn (C') có tâm I_2 và bán kính $R_2 = 2\sqrt{2}$

Vậy (C'): $(x - 0)^2 + (y - 2)^2 = 8 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4y - 4 = 0$

ĐS: (A)

Câu 9: (C) có tâm I(1; 1) và bán kính R = 2

Vì I thuộc đường phân giác của góc phần tư thứ nhất, nên ảnh của I qua phép quay góc 90^0 là $I_1(-1;1)$

Qua phép vị tự tâm O tỉ số –2 điểm I_1 biến thành $I_2(2; -2)$

Vậy qua phép dời hình nói trên đường tròn (C) biến thành đường tròn (C') có tâm I_2 và bán kính $R_2 = 4$

Vậy (C'): $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 16 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x + 4y - 8 = 0$

ĐS: (B)

ÔN CHƯƠNG

Câu 1: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng khẳng định nào sai?

(A) Phép đồng nhất là một phép tịnh tiến □ đúng, □ sai

(B) Phép đồng nhất là một phép quay □ đúng, □ sai

(C) Phép đồng nhất là một phép đối xứng tâm □ đúng, □ sai

(D) Phép đồng nhất là một phép vị tự □ đúng, □ sai

Câu 2: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng khẳng định nào sai?

(A) Phép đối xứng tâm là một phép vị tự □ đúng, □ sai

(B) Phép đối xứng tâm là một phép đồng dạng □ đúng, □ sai

(C) Phép đối xứng tâm là một phép quay □ đúng, □ sai

(D) Phép đối xứng tâm là một phép đối xứng trục □ đúng, □ sai

Câu 3: Trong các phép biến hình sau, phép nào không phải là phép dời hình?

(A) Phép quay **(B)** Phép đồng nhất

(C) Phép vị tự với tỉ số -1 **(D)** Phép đồng dạng với tỉ số 2

Câu 4: Cho hai điểm phân biệt A, B

Trong các khẳng định sau đây, khẳng định nào đúng khẳng định nào sai?

(A) Có duy nhất một phép đối xứng trục biến A thành B □ đúng, □ sai

(B) Có duy nhất một phép tịnh tiến biến A thành B □ đúng, □ sai

(C) Có duy nhất một phép quay biến A thành B □ đúng, □ sai

(D) Có duy nhất một phép vị tự biến A thành B □ đúng, □ sai

Câu 5: Hình nào sau đây có vô số trục đối xứng?

(A) Parabol **(B)** Hình vuông

(C) Đường thẳng **(D)** Đoạn thẳng

Câu 6: Hình nào sau đây có vô số tâm đối xứng?

(A) Hình lục giác đều

(B) Hình gồm hai đường thẳng cắt nhau

(C) Hình gồm hai đường thẳng song song

(D) Hình gồm hai đường tròn có bán kính bằng nhau

Câu 7: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

(A) Phép tịnh tiến biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó

(B) Phép đối xứng trục biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó

(C) Phép đối xứng tâm biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó

(D) Phép vị tự biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó

Câu 8: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

(A) Có phép tịnh tiến biến mọi điểm thành chính nó

(B) Có phép đối xứng trục biến mọi điểm thành chính nó

(C) Có phép quay biến mọi điểm thành chính nó

(D) Có phép vị tự biến mọi điểm thành chính nó

Câu 9: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

(A) Hai đường thẳng bất kì luôn đồng dạng

(B) Hai đường tròn bất kì luôn đồng dạng

(C) Hai hình ngũ giác đều luôn đồng dạng

(D) Hai hình chữ nhật bất kì luôn đồng dạng

Câu 10: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường thẳng d: $x - y + 1 = 0$. Ảnh của d qua phép đối xứng qua trục hoành là đường thẳng có phương trình:

(A) $x + y + 1 = 0$ (B) $x - y - 1 = 0$

(C) $x + y - 1 = 0$ (D) $x + y + 2 = 0$

Câu 11: Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng d có phương trình $3x - 2y - 1 = 0$. Ảnh của d qua phép đối xứng tâm O có phương trình là

(A) $3x + 2y + 1 = 0$ (B) $-3x + 2y - 1 = 0$

(C) $3x + 2y - 1 = 0$ (D) $3x - 2y - 1 = 0$

Câu 12: Trong mặt phẳng Oxy cho parabol (P): $y = x^2 + 1$ và điểm I(1; 1). Ảnh của (P) qua phép đối xứng tâm I là parabol (P') có phương trình

(A) $y = -x^2 + 1$ (B) $y = -x^2 + 4x - 3$

(C) $y = -x^2 + 4x + 3$ (D) $y = -x^2 - 4x - 3$

Câu 13: Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng d có phương trình: $3x + y + 1 = 0$. Ảnh của d qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u} = (2; 1)$ là đường thẳng có phương trình

(A) $3x + y - 6 = 0$ (B) $3x + y + 6 = 0$

(C) $3x - y - 6 = 0$ (D) $3x - y + 6 = 0$

Câu 14: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho đường tròn (C) có phương trình $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 4 = 0$. Ảnh của đường tròn (C) qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = (-2; 1)$ là đường tròn có phương trình là

(A) $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 7 = 0$ (B) $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 7 = 0$

(C) $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 7 = 0$ (D) $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 7 = 0$

Câu 15: Trong mặt phẳng Oxy cho điểm A(0; 2). Ảnh của A qua phép quay tâm O góc -90^0 có toạ độ là

(A) (0; 2) (B) (2; 0) (C) (−2; 0) (D) (2; 2)

Câu 16: Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng d có phương trình $x + 2y - 4 = 0$. Ảnh của d qua phép quay tâm O góc -90^0 là đường thẳng có phương trình:

(A) $2x - y - 4 = 0$ (B) $2x + y - 4 = 0$

(C) $2x - y + 4 = 0$ (D) $2x + y + 4 = 0$

Câu 17: Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn (C): $(x - 2)^2 + y^2 = 9$. Ảnh của (C) qua phép quay tâm O góc quay 90^0 là đường tròn có phương trình là:

(A) $x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0$ (B) $x^2 + y^2 + 4x - 5 = 0$

(C) $x^2 + y^2 + 4y - 5 = 0$ (D) $x^2 + y^2 - 4y - 5 = 0$

Câu 18: Trong mặt phẳng Oxy, ảnh của $M(1; 2)$ qua phép vị tự tâm O tỉ số 2 là:

(A) $(2; 1)$ **(B)** $(2; -4)$ **(C)** $(2; 4)$ **(D)** $(2; -4)$

Câu 19: Trong mặt phẳng Oxy, ảnh của $M(1; 2)$ qua phép vị tự tâm $I(-2; 3)$ tỉ số 2 là điểm có toạ độ:

(A) $(4; 1)$ **(B)** $(1; 4)$ **(C)** $(-4; -1)$ **(D)** $(-1; -4)$

Câu 20: Trong mặt phẳng Oxy, ảnh của đường thẳng d: $x + 2y - 1 = 0$ qua phép vị tự tâm O tỉ số -2 là đường thẳng có phương trình

(A) $x - 2y - 2 = 0$ **(B)** $x + 2y + 2 = 0$

(C) $x - 2y + 2 = 0$ **(D)** $x + 2y - 2 = 0$

Câu 21: Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng d có phương trình $x - 2y - 1 = 0$ và điểm $I(1; 2)$. Ảnh của đường thẳng d qua phép vị tự tâm I tỉ số 2 là đường thẳng có phương trình

(A) $x - 2y - 5 = 0$ **(B)** $x + 2y - 5 = 0$

(C) $x - 2y + 5 = 0$ **(D)** $x + 2y + 5 = 0$

Câu 22: Trong mặt phẳng Oxy cho hai điểm $A(2; -3)$, $B(1; 1)$, $C(3; 4)$. Gọi F là hợp thành bởi phép đối xứng qua tâm B và phép vị tự tâm C tỉ số -2. Ảnh của A qua F có toạ độ là:

(A) $(9; 2)$ **(B)** $(2; 9)$ **(C)** $(-9; -2)$ **(D)** $(-2; -9)$

TRẢ LỜI

Câu 1:

(A) Phép đồng nhất là một phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{0}$, khẳng định đúng

(B) Phép đồng nhất là một phép quay với góc quay $k360^0$ $(k \in Z)$, khẳng định đúng

(C) Phép đồng nhất không thể là phép đối xứng tâm, khẳng định sai

(D) Phép đồng nhất là một phép vị tự với tỉ số 1, khẳng định đúng

Câu 2:

(A) Phép đối xứng tâm là phép vị tự có tâm vị tự là tâm của phép đối xứng và có tỉ số -1, khẳng định đúng

(B) Phép đối xứng tâm là phép đồng dạng với hệ số đồng dạng 1, khẳng định đung

(C) Phép đối xứng tâm là phép quay với tâm quay là tâm đối xứng và góc quay bằng 180^0, khẳng định đúng

(D) Phép đối xứng tâm không thể là phép đối xứng trục, khẳng định sai

Câu 3: (D)

Câu 4:

(A) Khẳng định đúng

(B) Khẳng định đúng

(C) Khẳng định sai

(D) Khẳng định sai

Câu 5:

Mọi đường thẳng vuông góc với đường thẳng a đều là trục đối xứng của a.

ĐS: (C)

Câu 6: Hình gồm hai đường thẳng song song có vô số tâm đối xứng.

ĐS: (C)

Câu 7:

Khẳng định (B) sai. **ĐS: (B)**

Câu 8:

(A) Khẳng định (A) là đúng, đó là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{0}$

(B) Khẳng định sai

ĐS: (B)

Câu 9:

Khẳng định ở câu (D) là khẳng định sai

ĐS: (D)

Câu 10: Lấy điểm M(x; y), điểm đối xứng với M qua trục hoành là $M'(x; -y)$

Vậy ảnh của d qua phép đối xứng trục hoành là:

$x + y + 1 = 0$

ĐS: (A)

Câu 11: Điểm M(x; y), điểm đối xứng với M qua tâm O là $M'(-x; -y)$

Vậy ảnh của d qua phép đối xứng tâm O có phương trình là

$3(-x) - 2(-y) - 1 = 0 \Leftrightarrow -3x + 2y - 1 = 0$

ĐS: (B)

Câu 12:

Với mọi điểm M(x; y), điểm đối xứng với M qua I là điểm $M'(2 - x; 2 - y)$

Vậy phương trình của (P') là:

$2 - y = (2 - x)^2 + 1 \Leftrightarrow 2 - y = 4 - 4x + x^2 + 1 \Leftrightarrow y = -x^2 + 4x - 3$

ĐS: (B)

Câu 13: Với mọi điểm M(x; y), ảnh của M qua phép tịnh tiến theo $\vec{u} = (2; 1))$ là điểm $M'(x + 2; y + 1)$

Thay x bởi x – 2 và y bởi y – 1 ta có phương trình của ảnh d' của d qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$

d': $3(x - 2) + (y - 1) + 1 = 0 \Leftrightarrow 3x + y - 6 = 0$

ĐS: (A)

Câu 14: Với mọi điểm M (x; y), ảnh của M qua phép tịnh tiến T theo vectơ $\vec{v}$ là điểm $M'(x - 2; y + 1)$

Vậy ảnh của (C) qua T là đường tròn

(C'): $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 - 6(x + 2) + 4(y - 1) + 4 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x + 2y - 7 = 0$

ĐS: (B)

Câu 15: (B)

Câu 16: Lấy $M(0; 2) \in d$, ảnh của M qua phép quay Q tâm O góc quay -90^0 là điểm $M'(2; 0)$

Ảnh của d qua phép quay Q là đường thẳng d' đi qua M' và vuông góc với d, vậy phương trình của d' là:

$$2(x - 2) - 1(y - 0) = 0 \Leftrightarrow 2x - y - 4 = 0$$

ĐS: (A)

Câu 17:

(C) có tâm $I(2; 0)$ và bán kính $R = 3$

Ảnh của I qua phép quay Q tâm O góc quay 90^0 là $I'(0; 2)$

Vậy ảnh của (C) qua Q là đường tròn (C') tâm I' bán kính $R = 3$, vậy

$$(C'): x^2 + (y - 2)^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4y - 5 = 0$$

ĐS: (D)

Câu 18:

Ảnh của M qua phép vị tự V tâm O tỉ số 2 là M_1, ta có:

$$\overrightarrow{OM_1} = 2\overrightarrow{OM}$$

Vậy $M_1(2; 4)$

ĐS: (C)

Câu 19:

Gọi $M_1(x_1; y_1)$ là ảnh của M qua phép vị tự tâm I tỉ số 2, ta có:

$$\overrightarrow{IM_1} = 2\overrightarrow{IM} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2 = 2(1 + 2) \\ y_1 - 3 = 2(2 - 3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ y_1 = 1 \end{cases}$$

ĐS: (A)

Câu 20: Với mọi điểm $M(x; y)$, ảnh của M qua phép vị tự V tâm O tỉ số -2 là điểm $M_1(-2x; -2y)$

Vậy ảnh của d qua V là đường thẳng d' có phương trình

$$-\frac{x}{2} + 2\left(-\frac{y}{2}\right) - 1 = 0 \quad \text{(thay x bởi } -\frac{x}{2}\text{, y bởi } -\frac{y}{2}\text{)}$$

$\Leftrightarrow x + 2y + 2 = 0$

ĐS: (B)

Câu 21: Gọi $M_1(x_1; y_1)$ là ảnh của điểm $M(x; y)$ qua phép vị tự V tâm I tỉ số 2, ta có

$$\overrightarrow{IM_1} = 2\overrightarrow{IM} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 1 = 2(x - 1) \\ y_1 - 2 = 2(x - 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{x_1 + 1}{2} \\ y = \dfrac{y_1 + 2}{2} \end{cases}$$

Ảnh của d qua V có phương trình:

$$\frac{x + 1}{2} - 2\frac{y + 2}{2} - 1 = 0 \Leftrightarrow x - 2y - 5 = 0$$

ĐS: (A)

Câu 22:

Gọi A_1 là ảnh của A(2; −3) qua phép đối xứng tâm B, ta có $A_1(0; 5)$

Gọi $A_2(x_2; y_2)$ là ảnh của A_1 qua phép vị tự tâm C tỉ số −2, ta có:

$$\overrightarrow{CA_2} = -2\overrightarrow{CA_1} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 - 3 = -2(0 - 3) \\ y_2 - 4 = -2(5 - 4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 9 \\ y_2 = 2 \end{cases}$$

ĐS: (A)

Chương II
QUAN HỆ SONG SONG

§1. ĐẠI CƯƠNG VỀ ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

TÓM TẮT LÍ THUYẾT

I. Các tính chất:

1. Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt

2. Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua 3 điểm không thẳng hàng

3. Nếu một đường thẳng có hai điểm phân biệt thuộc mặt phẳng thì mọi điểm của đường thẳng đều thuộc mặt phẳng

4. Tồn tại bốn điểm không cùng thuộc một mặt phẳng

5. Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng còn có một điểm chung khác nữa

II. Cách xác định một mặt phẳng

Có ba cách xác định một mặt phẳng

1. Mặt phẳng hoàn toàn xác định khi biết nó đi qua ba điểm không thẳng hàng

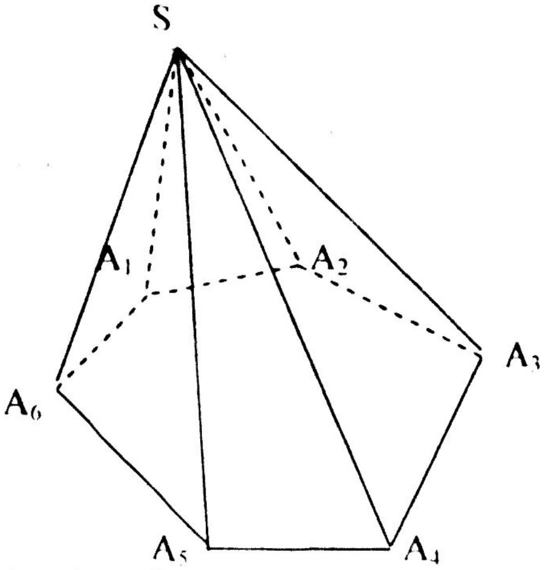
2. Mặt phẳng hoàn toàn xác định khi biết nó đi qua một điểm và chứa một đường thẳng không đi qua điểm đó

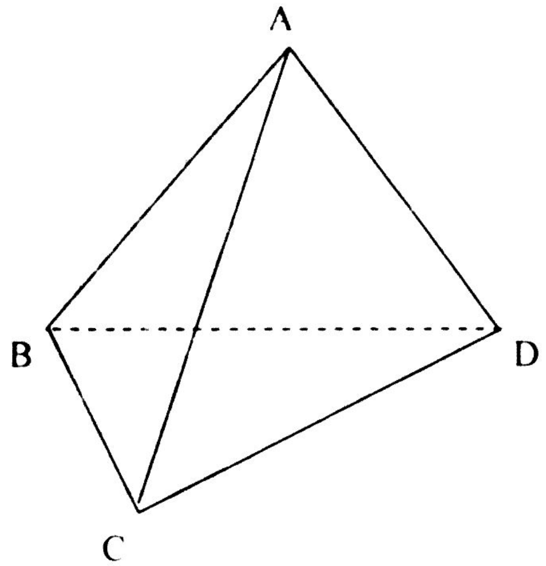
3. Mặt phẳng hoàn toàn xác định khi biết nó chứa hai đường thẳng cắt nhau

III. Hình chóp và hình tứ diện

Trong mặt phẳng (P) cho đa giác lồi $A_1A_2...A_n$. Lấy điểm S ngoài (P). Lần lượt nối S với các đỉnh $A_1, A_2, ..., A_n$ ta được n tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_{n-1}A_n, SA_nA_1$. Hình gồm đa giác $A_1A_2...A_n$ và n tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_nA_1$ gọi là hình chóp, kí hiệu $S.A_1A_2...A_n$

Cho bốn điểm không đồng phẳng A, B, C, D. Hình gồm bốn tam giác ABC, ACD, ABD, BCD gọi là hình tứ diện



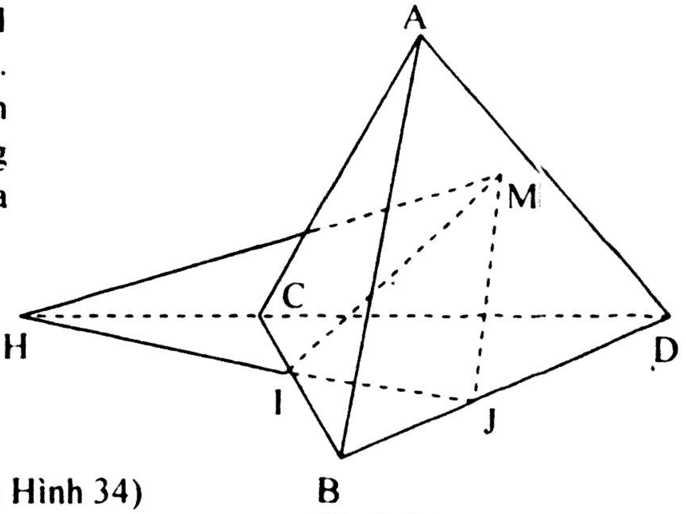


CÁC DẠNG TOÁN CƠ BẢN

I. Dạng toán 1: Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng

Phương pháp: Để xác định giao tuyến của hai mặt phẳng ta tìm hai điểm chung phân biệt thuộc chúng

VD1: Cho tứ diện ABCD và điểm M thuộc miền trong của tam giác ACD. Gọi I và J tương ứng là hai điểm trên cạnh BC và BD sao cho IJ không song song với CD. Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (ACD) và (IJM).



Hình 34

Giải

Gọi $H = CD \cap IJ$

$\Rightarrow H \in (ACD) \cap (IJM)$

Lại do $M \in (ACD) \cap (IJM)$

Vậy $(ACD) \cap (IJM) = MH$ (xem Hình 34)

VD2: Cho hình chóp S.ABCD. AB cắt CD tại E, AC cắt BD tại F.

a) Tìm giao tuyến của (SAB) và (SCD), (SAC) và (SBD)

b) Tìm giao tuyến của (SEF) với (SBC)

Giải

a) S là điểm chung của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD)

$E \in AB, AB \subset (SAB) \Rightarrow E \in (SAB)$

$E \in CD, CD \subset (SCD) \Rightarrow E \in (SCD)$

E là điểm chung thứ hai của (SAB) và (SCD)

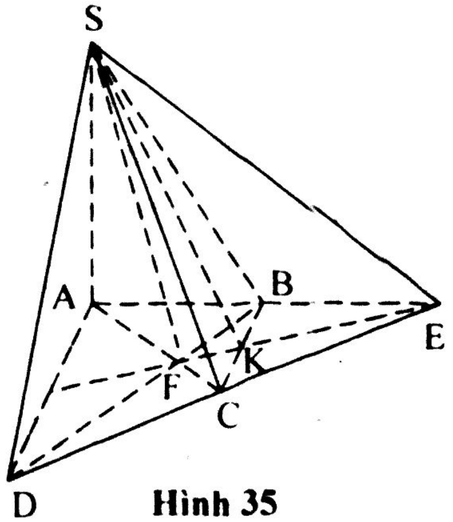
Vậy giao tuyến của (SAB) và (SCD) là SE

Chứng minh tương tự giao tuyến của (SAC) và (SBD) là SF

b) S là điểm chung của (SEF) và (SBC)

Gọi K là giao điểm của BC và EF ta có K là điểm chung thứ hai

Vậy giao tuyến của hai mặt phẳng (SEF) và (SBC) là SK



Hình 35

II. Dạng toán 2: Xác định giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng

Phương pháp: Xác định giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P)

TH1: Nếu trong (P) có đường thẳng a cắt d tại A thì d cắt (P) tại A

TH2: Nếu trong (P) không có sẵn đường thẳng a cắt (P) ta thực hiện như sau:

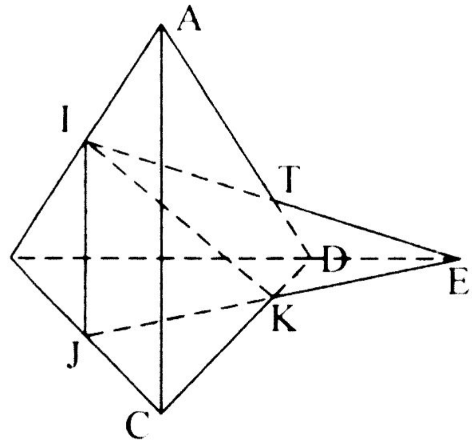
- Chọn mặt phẳng (Q) qua d và cắt (P) theo giao tuyến b
- Xác định giao điểm B của b và d

B cũng là giao điểm của d và (P)

VD: Cho tứ diện ABCD. Trên cạnh AB lấy I, CB lấy điểm J, CD lấy điểm K sao cho JK không song song với BD

a) Tìm giao điểm của JK và (ABD)

b) Tìm giao điểm của AD và (IJK)



Hình 36

Giải

a) Gọi E = JK ∩ BD ⇒ E = JK ∩ (ABD)

b) (ABD) là mặt phẳng qua AD

(ABD) và (IJK) cắt nhau theo giao tuyến IE

Gọi T = IE ∩ AD ⇒ T = AD ∩ (IJK)

(xem Hình 36)

VD2: Cho hình chóp SABCD, điểm M trên cạnh SC, điểm N trên cạnh BC

a) Tìm giao điểm của AM và (SBD)

b) Tìm giao điểm của SD và (AMN)

Giải

a) Ta chọn (SAC) chứa AM, tìm giao tuyến của (SAC) và (SBD) (xem hình 37)

Gọi O là giao điểm của AC và BD

Dễ chứng minh (SAC) ∩ (SBD) = SO

Gọi I là giao điểm của SO và AM

I là giao điểm của AM và (SBD)

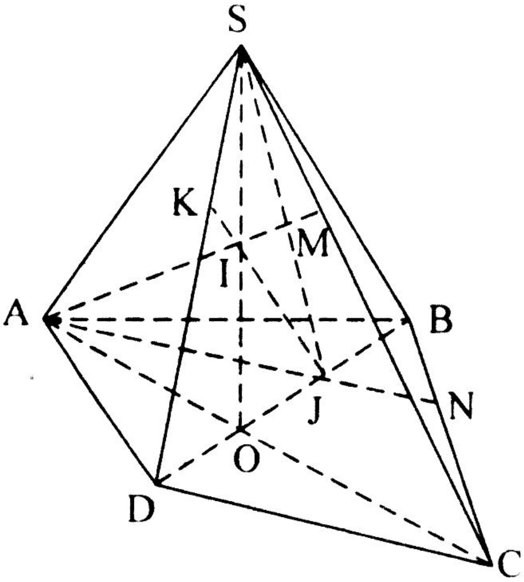
b) Chọn (SBD) chứa SD, tìm giao tuyến của (SBD) và (AMN)

Gọi J là giao điểm của AN và BD

Dễ chứng minh (SBD) ∩ (AMN) = IJ

Gọi K là giao điểm của IJ của SD

K là giao điểm của SD và (AMN)



Hình 37

III. Dạng toán 3: Chứng minh 3 điểm thẳng hàng

> ***Phương pháp:*** Ngoài các phương pháp đã biết trong hình học phẳng, ta còn có thể chứng minh ba điểm đó cùng thuộc hai mặt phẳng phân biệt

VD1: Cho tứ diện SABC. Trên SA, SB, SC lần lượt lấy các điểm D, E, và F sao cho DE cắt AB tại I, EF cắt BC tại J, FD cắt CA tại K. Chứng minh I, J, K thẳng hàng

Giải

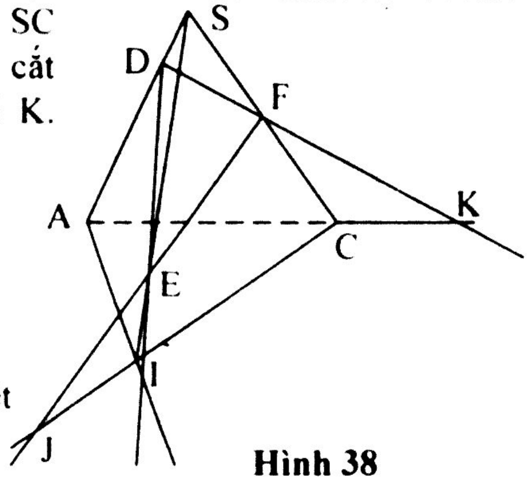
Ta có

I, J, K thuộc (DEF)

I, J, K thuộc (ABC)

(DEF) và (ABC) là hai mặt phẳng phân biệt

Vậy I, J, K thẳng hàng (xem Hình 38)



Hình 38

VD2: Cho hình chóp S.ABCD. Gọi I, J là hai điểm trên SA và SC. Mặt phẳng (P) quay quanh IJ cắt SB tại M, SD tại N. Chứng minh IJ, MN, SO đồng qui

Giải

Gọi L là giao điểm của của IJ và MN, ta chứng minh L, S, O thẳng hàng (xem Hình 39)

Ta có:

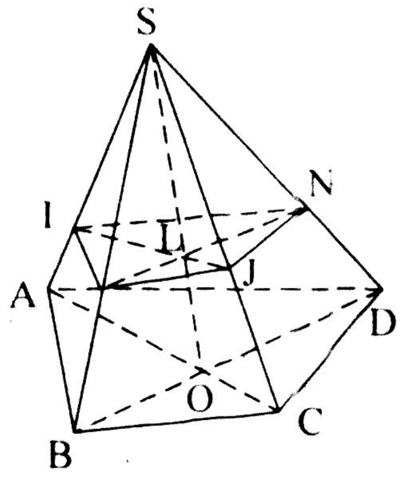
S, O, L thuộc (SAC)

S, O, L thuộc (SBD)

Mặt khác (SAC) và (SBD) là hai mặt phẳng phân biệt

Vậy S, O, L thẳng hàng

Hay nói cách khác IJ, MN, SO đồng qui tại L



Hình 39

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Chọn khẳng định đúng:

(A) Qua 2 điểm phân biệt có duy nhất một mặt phẳng

(B) Qua 3 điểm phân biệt bất kì có duy nhất một mặt phẳng

(C) Qua 3 điểm không thẳng hàng có duy nhất một mặt phẳng

(D) Qua 4 điểm phân biệt bất kì có duy nhất một mặt phẳng

Câu 2: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng khẳng định nào sai?

(A) Qua 2 đường thẳng bất kì có duy nhất một mặt phẳng ☐ đúng, ☐ sai

(B) Qua 2 đường thẳng cắt nhau có duy nhất một mặt phẳng ☐ đúng, ☐ sai

(C) Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm và một đường thẳng bất kì cho trước ☐ đúng, ☐ sai

Câu 3: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai?

(A) Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một đường thẳng và một điểm ngoài đường thẳng đó ☐ đúng, ☐ sai

(B) Có duy nhất một mặt phẳng đi qua 2 điểm và một đường thẳng bất kì ☐ đúng, ☐ sai

(C) Có duy nhất mặt phẳng đi qua 3 điểm phân biệt ☐ đúng, ☐ sai

Câu 4: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai?

(A) Hai mặt phẳng có một điểm chung thì chúng có vô số điểm chung ☐ đúng, ☐ sai

(B) Hai mặt phẳng có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất ☐ đúng, ☐ sai

(C) Hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất ☐ đúng, ☐ sai

(D) Nếu 3 điểm M, N, P cùng thuộc hai mặt phẳng phân biệt thì chúng thẳng hàng ☐ đúng, ☐ sai

Câu 5 Các yếu tố nào sau đây xác định một mặt phẳng duy nhất?

(A) Ba điểm phân biệt (B) Một điểm và một đường thẳng

(C) Hai đường thẳng cắt nhau (D) Bốn điểm phân biệt

Câu 6: Cho 3 đường thẳng d_1, d_2, d_3 không cùng thuộc một mặt phẳng và cắt nhau từng đôi. Chọn khẳng định đúng

(A) 3 đường thẳng trên đồng qui

(B) 3 đường thẳng trên trùng nhau

(C) 3 đường thẳng trên chứa ba cạnh của một tam giác

(D) Các khẳng định ở a, b, c đều sai

Câu 7 Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

(A) Nếu ba điểm A, B, C là ba điểm chung của hai mặt phẳng (P) và (Q) thì A, B, C thẳng hàng

(B) Nếu A, B, C thẳng hàng và (P) và (Q) có điểm chung là A thì B, C cũng là hai điểm chung của (P) và (Q)

(C) Nếu ba điểm A, B, C là ba điểm chung của hai mặt phẳng phân biệt (P) và (Q) thì A, B, C không thẳng hàng

(D) Nếu A, B, C thẳng hàng và A, B là hai điểm chung cuả (P) và (Q) thì C cũng là điểm chung của (P) và (Q)

Câu 8 Cho tứ giác ABCD. Có thể xác định được bao nhiêu mặt phẳng chứa tất cả các đỉnh của tứ giácABCD?

(A) 1 (B) 2

(C) 3 (D) Không có mặt phẳng nào

Câu 9 Cho tứ diện ABCD và điểm M thuộc miền trong của tam giác ACD. Gọi I và J tương ứng là hai điểm trên cạnh BC và BD sao cho IJ không song song với CD. Gọi H, K lần lượt là giao điểm của IJ với CD của MH và AC. Giao tuyến của hai mặ phẳng (ACD) và (IJM) là

(A) KI (B) KJ (C) MI (D) MH

Câu 10: Cho tứ diện ABCD, O là một điểm thuộc miền trong tam giác BCD, M là điểm tên cạnh AO, I trên cạnh BC, J trên cạnh BD. JI cắt CD tại K, BO cắt JI tại E, BO cắt CD tại H. ME cắt AH tại F. Giao tuyến của (MJI) và (ACD) là:

(A) KM (B) AK (C) MF (D) KF

Câu 11: Cho 4 điểm không đồng phẳng A, B, C, D. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của AD và BC. Giao tuyến của (IBC) và (KAD) là

(A) IK (B) BC (C) AK (D) DK

Câu 12: Cho hình chóp S.ABCD. AB cắt CD tại E, AC cắt BD tại F. Chọn khẳng định đúng

(A) $(SAB) \cap (SCD) = SE$ (B) $(SAC) \cap (SBD) = SE$

(C) $(SAB) \cap (SCD) = SF$ (D) $(SAB) \cap (SCD) = EF$

Câu 13: Cho tứ diện ABCD. I là điểm nằm trên đường thẳng BD và ngoài đoạn BD. Trong mặt phẳng BAD vẽ đường thẳng qua I, cắt AB tại K, cắt AD tại L. Trong mặt phẳng BCD, vẽ đường thẳng qua I, cắt CB tại M, cắt CD tại N. BN cắt DM tạiO. BL cắt DK tại E, LM cắt KN tại F. Chọn khẳng định đúng?

(A) A, F, O không thẳng hàng và C, F, E thẳng hàng
(B) A, F, O thẳng hàng và C, F, E thẳng hàng
(C) A, F, O thẳng hàng và C, E, F không thẳng hàng
(D) A, F, O không thẳng hàng và C, F, E không thẳng hàng

Câu 14: Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và BC. Trên đoạn BD lấy điểm P sao cho BP = 2PD. Giao điểm của đường thẳng CD và mặt phẳ ng (MNP) là giao điểm của

(A) NP và CD
(B) CD và MN
(C) CD và MP
(D) CD và AP

Câu 15: Cho tứ diện ABCD, trên AC và AD lần lượt lấy M, N sao cho MN không song song với CD. Gọi O là một điểm thuộc miền trong của tam giác BCD. Chọn khẳng định đúng

(A) Giao điểm của BC với (OMN) là giao điểm của BC với OM
(B) Giao điểm của BC với (OMN) là giao điểm của BC với ON
(C) Giao điểm của BC với (OMN) là giao điểm của BC với MN
(D) Các khẳng định ở (A), (B), (C) đều sai

Câu 16: Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SC. Gọi I là giao điểm của AM với (SBD). Chọn khẳng định đúng

(A) $\overrightarrow{IA} = -2\overrightarrow{IM}$
(B) $\overrightarrow{IA} = -3\overrightarrow{IM}$
(C) $\overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{IM}$
(D) IA = 2,5IM

Câu 17: Chọn khẳng định sai

Thiết diện của một hình tứ diện với một mặt phẳng có thể là

(A) Tam giác
(B) Tam giác vuông
(C) Tứ giác
(D) Ngũ giác

Câu 18: Cho mp(P) và điểm A ở trên (P) và một đường thẳng a không nằm trong (P) và a không đi qua A. Có nhiều nhất bao nhiêu đường thẳng b thuộc (P) biết b đi qua A và cắt a?

(A) 1
(B) 2
(C) Vô số đường thẳng
(D) Không có đường thẳng nào

Câu 19: Cho tứ diện ABCD. Gọi E, F, G, K lần lượt thuộc các cạnh AB, AC, BD, AD. EF cắt BC tại I, EG cắt AD tại H, KF cắt CD tại T, EK cắt BD tại L

(A) I, T, L thẳng hàng và IG, FH, CD đồng qui
(B) I, T, L không thẳng hàng và IG, FH, CD đồng qui
(C) I, T, L thẳng hàng và IG, FH, CD không đồng qui
(D) I, T, L không thẳng hàng và IG, FH, CD không đồng qui

TRẢ LỜI

Câu 1: (C)

Câu 2:

(A) Khẳng định sai
(B) Khẳng định đúng
(C) Khẳng định sai

Câu 3:

(A) Khẳng định đúng

(B) Khẳng định sai

(C) Khẳng định sai. Khẳng định đúng là: có duy nhất mặt phẳng đi qua 3 điểm không thẳng hàng

Câu 4:

(A) Khẳng định đúng **(B)** Khẳng định sai

(C) Khẳng định đúng **(D)** Khẳng định đúng

Câu 5: (C)

Câu 6:

Khẳng định câu (B) và (C) rõ ràng là sai vì 3 đường thẳng trên không cùng thuộc một mặt phẳng. Kiểm tra ta thấy khẳng định câu (A) là đúng

ĐS: (A)

Có thể dùng phương pháp phản chứng để chứng minh

Câu 7: (D)

Câu 8: (A)

Câu 9: (xem Hình 40)

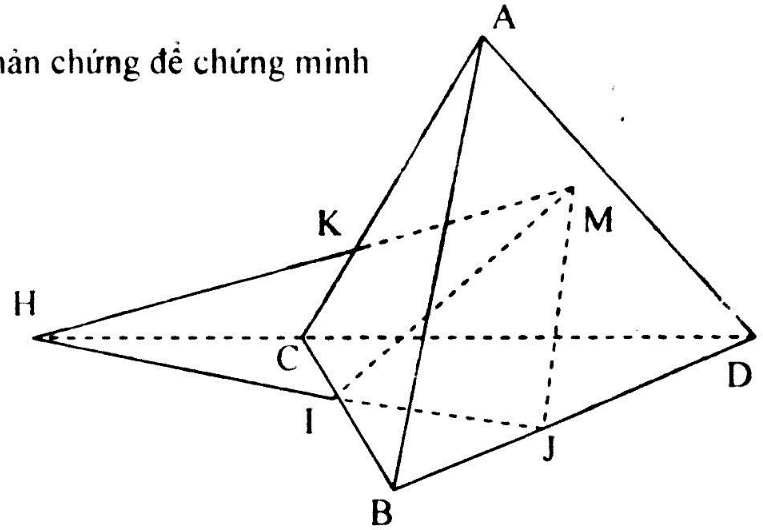
Vì $H = CD \cap IJ$

$\Rightarrow H \in (ACD) \cap (IJM)$

Lại do $M \in (ACD) \cap (IJM)$

Vậy $(ACD) \cap (IJM) = MH$

ĐS: (D)



Hình 40

Câu 10: (xem Hình 41)

Ta có:

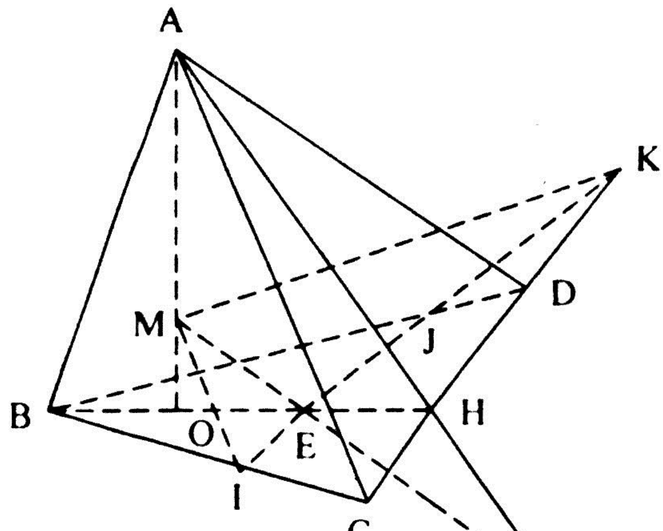
$K \in (ACD)$; $K \in (MJI)$

$F \in (ACD)$;

$F \in (MJI)$

$\Rightarrow (ACD) \cap (MJI) = KF$

ĐS: (D)



Hình 41

Câu 11: (xem Hình 45)

Vì $I = AD \cap CI$

$\Rightarrow I \in (IBC) \cap (KAD)$

$K = BC \cap DK$

$\Rightarrow K \in (IBC) \cap (KAD)$

Vậy $(IBC) \cap (KAD) = IK$

ĐS: (A)

Câu 12: (xem Hình 44)

$(SAB) \cap (SCD) = SE$

ĐS: (A)

Câu 13: (xem Hình 42)

Ta có:

$A \in (ABN) \cap (ADM)$

$F \in (ABN) \cap (ADM)$

$O \in (ABN) \cap (ADM)$

$\Rightarrow$ A, F, O thẳng hàng

$C \in (BCL) \cap (CKD)$;

$F \in (BCL) \cap (CKD)$

$E \in (BCL) \cap (CKD)$

$\Rightarrow$ C, F, E thẳng hàng

ĐS: (B)

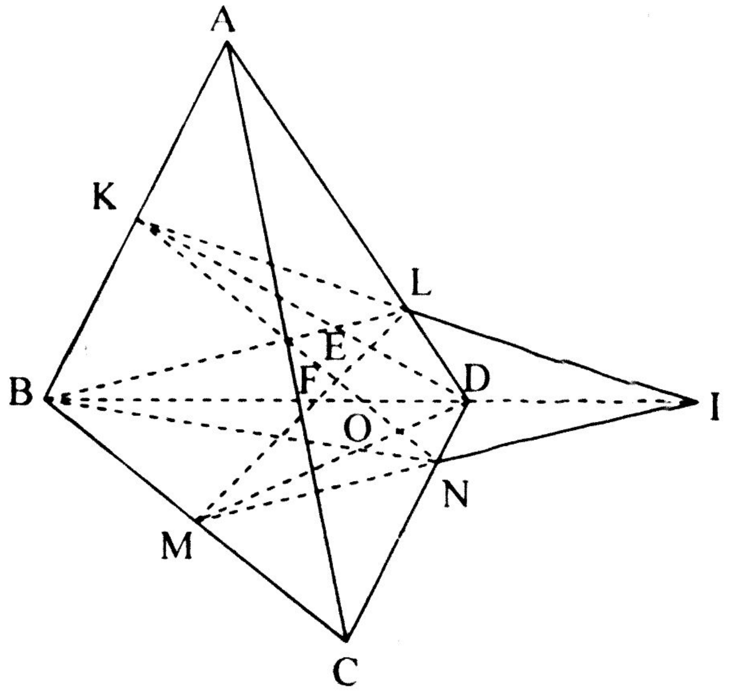
Câu 14: (xem Hình 43). Ta có

$Q \in CD$ (1)

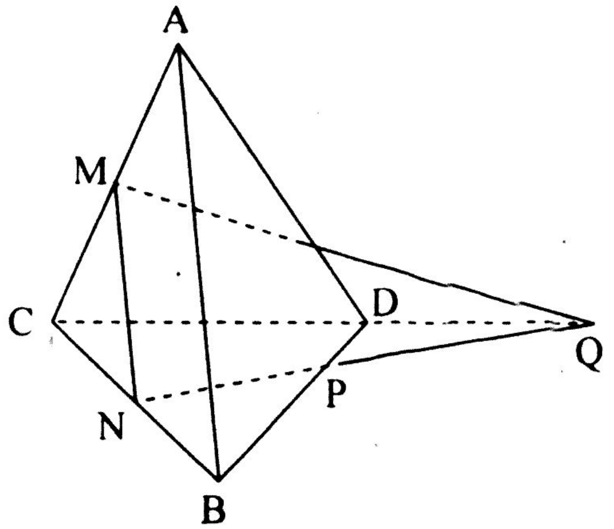
$Q \in NP \Rightarrow Q \in (MNP)$ (2)

(1) và (2) $\Rightarrow CD \cap (MNP) = Q$

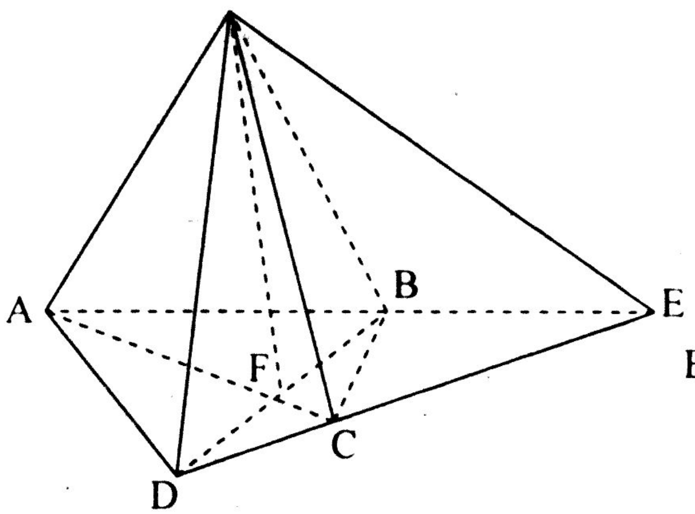
ĐS: (A)



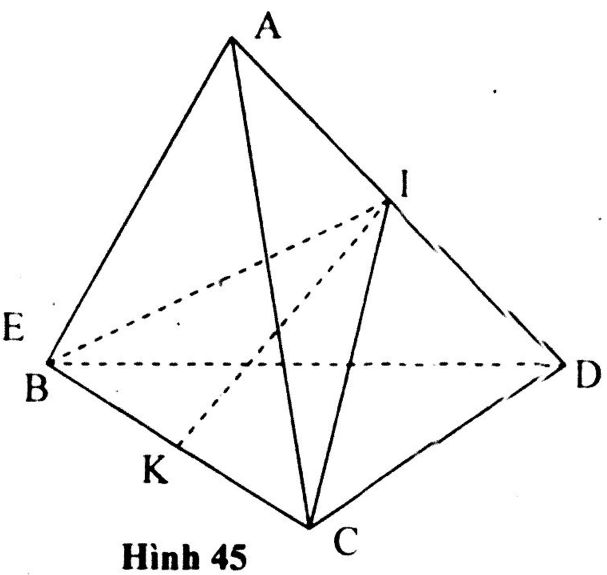
Hình 42



Hình 43



Hình 44



Hình 45

Câu 15: Các khẳng định ở (A), (B), (C) đều sai

Để tìm giao điểm ta thực hiện như sau: Kéo dài MN cắt CD tại I, nối OI cắt BC tại P. Giao điểm cần tìm là P (xem Hình 46)

ĐS: (D)

Câu 16: (xem Hình 47)

Gọi O là tâm của hình bình hành ABCD

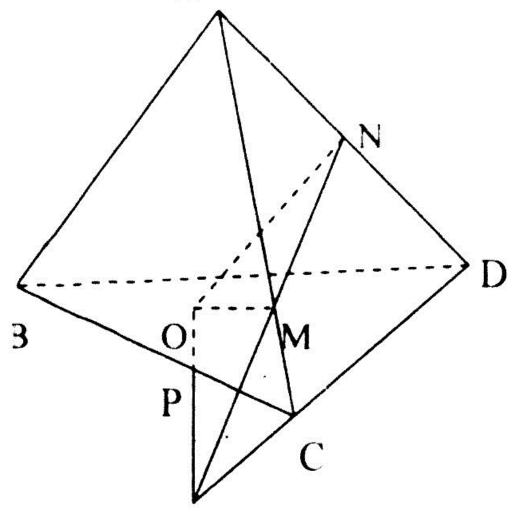
Vì AM và SO thuộc mặt phẳng (SAC) và không song song nên AM cắt SO tại I

Dễ chứng minh rằng I chính là giao điểm của AM và (SBD)

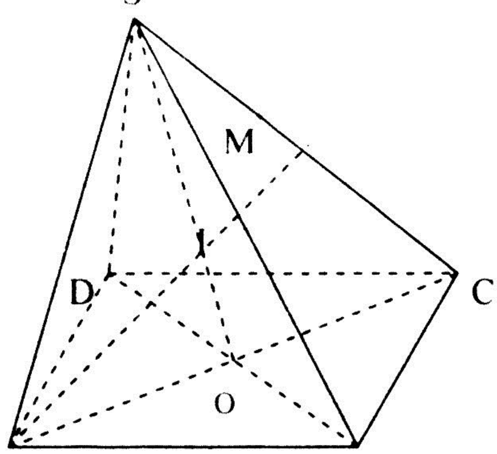
Vì SO và AM là hai trung tuyến của tam giác SAC nên I là trọng tâm của tam giác SAC

Vậy $\vec{IA} = -2\vec{IM}$

ĐS: (A)



Hình 46



Hình 47

Câu 17: Vì tứ diện có bốn mặt nên thiết diện có tối đa 4 đoạn giao tuyến, vì vậy không thể là ngũ giác

ĐS: (D)

Câu 18: Đây thực chất là bài toán dựng hình. Ta cần dựng đường thẳng b (bạn đọc tự vẽ hình). b chính là giao tuyến của mp(A, a) và mp(P) mp(A, a) và mp(P) phân biệt và có điểm chung A

Vậy có nhiều nhất một đường thẳng b

ĐS: (A)

Câu 19:

Việc chứng minh I, T, L thẳng hàng, bạn đọc xem phần phương pháp (xem Hình 48)

Ta chứng minh IG, FH, CD đồng qui

Gọi S là giao điểm của IG và FH (chú ý rằng IG, FH thuộc mp(IEH))

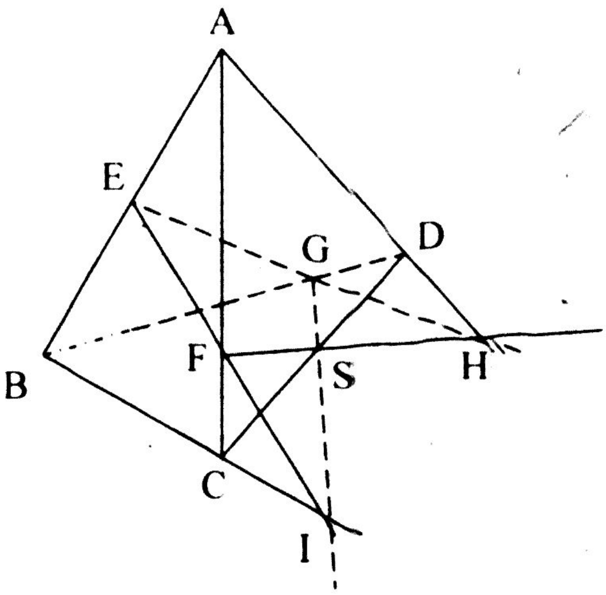
Ta chứng minh S, C, D thẳng hàng

C, S, D thuộc (ACH)

C, S,D thuộc (BIG)

Vậy C, S, D thẳng hàng

Hay IG, FH, CD đồng qui. ĐS (A)



Hình 48

§2. HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU VÀ HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

TÓM TẮT LÍ THUYẾT

I. Vị trí tương đối của hai đường thẳng a, b trong không gian

TH1: a, b cùng thuộc một mặt phẳng: ta nói a, b đồng phẳng

- a và b có điểm chung duy nhất M, ta nói a cắt b tại M, kí hiệu $a \cap b = M$
- a và b không có điểm chung. Ta nói a và b song song, kí hiệu a // b
- Nếu a và b có 2 điểm chung phân biệt ta nói a trùng với b, kí hiệu $a \equiv b$

TH2: Không có mặt phẳng chứa a và b: ta nói a và b chéo nhau

II. Tính chất:

1. Định lí 1: Trong không gian, qua một điểm không nằm trên đường thẳng cho trước, có một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đã cho

2. Định lí 2: Nếu ba mặt phẳng phân biệt đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng qui hoặc song song với nhau

Hệ quả: Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó

3. Định lí 3: Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với đường thẳng thứ ba thì song song nhau

CÁC DẠNG TOÁN CƠ BẢN

I. Dạng toán 1: Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng

Phương pháp: Để tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q), ngoài cách tìm hai điểm chung, ta có thể sử dụng cách sau: Tìm một điểm chung S. Tìm trong (P) và (Q) lần lượt hai đường thẳng a, b sao cho a // b. Giao tuyến của (P) và (Q) là đường thẳng đi qua S và song song với a

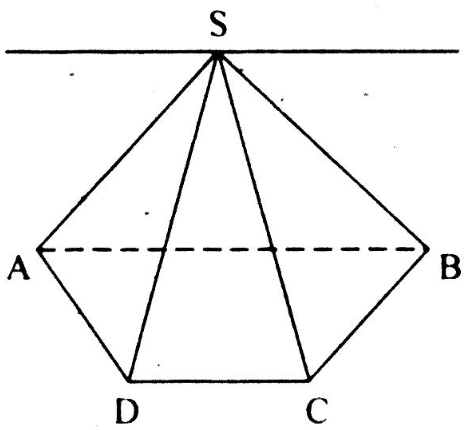
VD1: Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình thang đáy AB. Xác định giao tuyến của (SAB) và (SCD)

Giải

$S \in (SAB) \cap (SCD)$

$AB \subset (SAB)$, $CD \subset (SCD)$, AB // CD

Vậy giao tuyến của (SAB) và (SCD) là đường thẳng qua S và song song với AB (xem Hình 49)

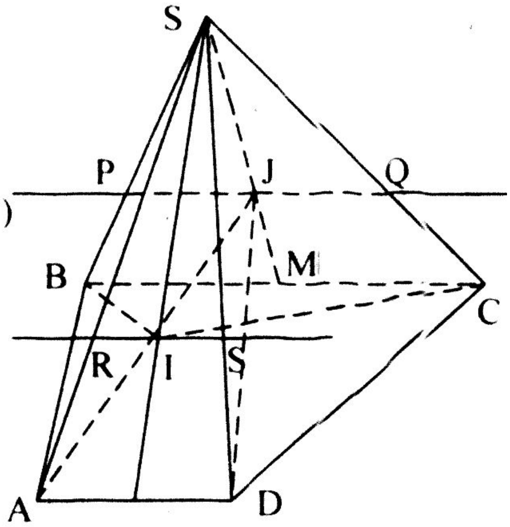


Hình 49

VD2: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang, cạnh đáy AD = a, CB = b. I, J lần lượt là trọng tâm các tam giác SAD và SBC

a) Tính độ dài đoạn giao tuyến của mặt phẳng (ADJ) và mặt bên (SBC) của hình chóp S.ABCD

b) Tìm độ dài đoạn giao tuyến của mặt phẳng (BCI) và mặt bên (SAD) cuai hình chóp S.ABCD



Hình 50

Giải

a) J là điểm chung của (ADJ) và (SBC)

Mặt khác AD // BC, AD $\subset$ (ADJ), BC $\subset$ (SBC)

Nên giao tuyến của (ADJ) và (SBC) là đường thẳng d qua J và song song với BC (xem Hình 50)

Gọi M là trung điểm của BC, P và Q lần lượt là giao điểm của d với SB và SC

Theo định lí Talet:

$$\frac{PQ}{BC} = \frac{SJ}{SM} = \frac{2}{3} \Rightarrow PQ = \frac{2}{3}b$$

Vậy đoạn giao tuyến của mặt phẳng (ADJ) và mặt bên (SBC) của hình chóp S.ABCD là đoạn PQ có độ dài $\frac{2}{3}b$

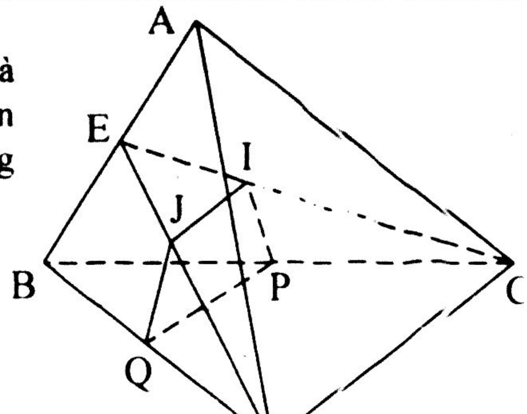
b) Tương tự độ dài đoạn giao tuyến của mặt phẳng (BCI) và mặt bêm (SAD) của hình chóp S.ABCD là đoạn RS có độ dài $\frac{2}{3}a$

II. Dạng toán 2: Chứng minh hai đường thẳng song song

Phương pháp: Ngoài các phương pháp đã biết trong hình học phẳmg ta còn có thể sử dụng các phương pháp sau

- Chứng minh chúng cùng song song với đường thẳng thứ ba
- Sử dụng tính chất: Hai mặt phẳng phân biệt lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng cũng song song với hai đường thẳng ấy
- Dùng định lí về giao tuyến của ba mặt phẳng

VD1: Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC và ABD. Lấy P trên cạnh CB, mặt phẳng (JIP) cắt DC tại Q. Chứng minh IJ // PQ



Hình 51

Giải

Gọi E là trung điểm của AB ta có

IJ và CD cùng thuộc mp(CED)

Lại do $\frac{EI}{EC} = \frac{EJ}{ED} = \frac{1}{3}$ (tính chất trọng tâm)

I thuộc cạnh EC, J thuộc cạnh ED

$\Rightarrow IJ \,//\, CD$

$(IJP) \cap (BCD) = QP$

$\Rightarrow IJ \,//\, PQ$

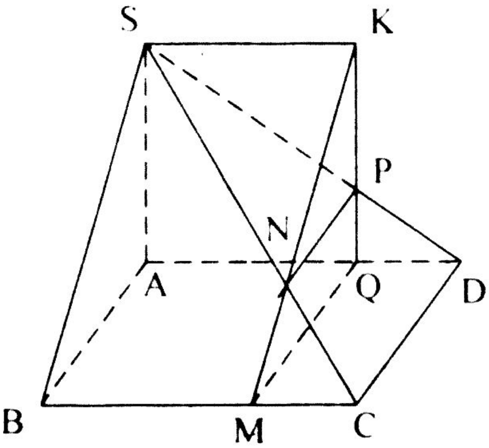
(xem Hình 51)

VD2: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi M, N, P, Q lần lượt nằm trên các cạnh BC, SC, SD, AD sao cho MN // BS, NP // CD, MQ // CD

a) Chứng minh SA // PQ

b) Gọi K là giao điểm của MN và PQ. Chứng minh SK // AD // BC

Giải



Hình 52

a) $MN \,//\, SB \Rightarrow \frac{CM}{CB} = \frac{CN}{CS}$ (1)

$MQ \,//\, AB \,//\, CD \Rightarrow \frac{CM}{CB} = \frac{DQ}{DA}$ (2)

$NP \,//\, CD \Rightarrow \frac{CN}{CS} = \frac{DP}{DS}$ (3)

(1), (2), (3) cho ta $\frac{DQ}{DA} = \frac{DP}{DS}$

$\Rightarrow PQ \,//\, SA$ (xem Hình 52)

b) Rõ ràng SK là giao tuyến của hai mặt phẳng (SBC) và (SAD)

Lại do $BC \subset (SBC)$, $AD \subset (SAD)$, BC // AD

Vậy SK // AD // BC

III. Dạng toán 3: Xác định thiết diện của mặt phẳng và hình chóp

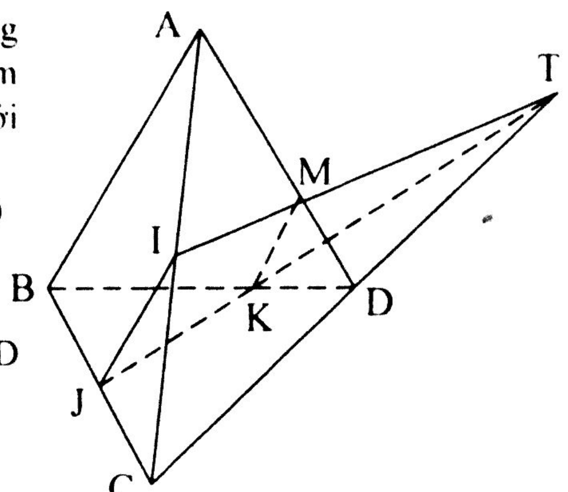
Phương pháp: Xác định từng đoạn giao tuyến của mặt phẳng và các mặt của hình chóp. Nối các đoạn giao tuyến ta được đa giác, là thiết diện cần xác định

VD: Cho tứ diện ABCD có các cạnh bằng nhau và bằng 6a. I, J lần lượt là trung điểm của AC và BC. K là điểm trên cạnh BD với KB = 2KD

a) Xác định thiết diện của tứ diện và (IJK)

b) Tính diện tích của thiết diện

Giải



Hình 53

a) Kéo dài JK cắt CD tại T. Nối TI cắt AD tại M (xem Hình 53)

Thiết diện là tứ giác IJKM

Vì IJ // AB nên IJ // AB // KM

Vậy IJKM là hình thang

Ta chứng minh IM = JK

$BJ = AI = 3a$

$BK = AM = 4a$

$\angle JBK = \angle IAM = 60^0$

$\Rightarrow \Delta JBK = \Delta IAM \Rightarrow IM = JK$

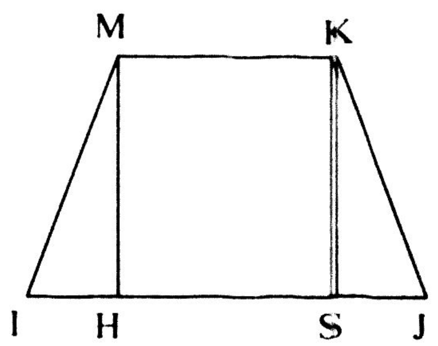
Vậy thiết diện là hình thang cân IJKM

b) Áp dụng định lí Côsin cho tam giác AIM ta có:

$IM^2 = AI^2 + AM^2 - 2AI.AM.\cos 60^0$

$= 9a^2 + 16a^2 - 12a^2 = 13a^2$

$\Rightarrow IM = a\sqrt{13}$



Hình 54

Gọi H, S là hình chiếu vuông góc của M, K lên IJ (xem Hình 54)

$IJ = 3a,\ MK = 2a$

$$IH = SJ = \frac{1}{2}(IJ - MK) = \frac{1}{2}a$$

Áp dụng định lí Pitagor cho tam giác vuông IMH ta có:

$$MH = \sqrt{MI^2 - IH^2} = \frac{a\sqrt{51}}{2}$$

$$S(IJKM) = MH.\frac{MK + IJ}{2} = \frac{5\sqrt{51}a^2}{4}$$

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai?

(A) Hai đường thẳng chéo nhau thì không có điểm chung ☐ đúng, ☐ sai

(B) Hai đường thẳng không có điểm chung thì chéo nhau ☐ đúng, ☐ sai

(C) Hai đường thẳng phân biệt không song song thì chéo nhau ☐ đúng, ☐ sai

(D) Hai đường thẳng phân biệt không cắt nhau, không song song nhau thì chéo nhau ☐ đúng, ☐ sai

Câu 2: Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b.

Chọn khẳng định sai trong các khẳng định sau:

(A) a và b không có điểm chung

(B) a và b không cùng thuộc một mặt phẳng

(C) Có nhiều đường thẳng cắt cả a và b

(D) Có hai đường thẳng c, d song song nhau và mỗi đường đều cắt cả a và b

Câu 3: Cho 2 đường thẳng song song d_1, d_2.

(A) Nếu đường thẳng d_3 song song với d_1 thì d_3 song song với d_2, ☐ đúng, ☐ sai

(B) Nếu đường thẳng d_3 cắt d_1 thì d_3 cắt d_2, ☐ đúng, ☐ sai

(C) Nếu đường thẳng d_3 vuông góc với d_1 thì d_3 vuông góc với d_2 ☐ đúng, ☐ sai

Câu 4: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Giao tuyến của (SAB) và (SCD) là

(A) Đường thẳng qua S và song song với DC

(B) Đường thẳng qua S và song song với AD

(C) Đường thẳng SO với O là tâm của hình bình hành

(D) Đường thẳng qua S và cắt AB

Câu 5: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang với các cạnh đáy là AB và CD. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AD và BC và G là trọng tâm của tam giác SAB Giao tuyến của (SAB) và (IJG) là

(A) SC

(B) Đường thẳng qua S và song song với AB

(C) Đường thẳng qua G và song song với DC

(D) Đường thẳng qua G và cắt BC

Câu 6: Cho tứ diện ABCD và ba điểm P, Q, R lần lượt lấy trên ba cạnh AB, CD, BC. Cho PR // AC và CQ = 2QD. Gọi giao điểm của AD và (PQR) là S. Chọn khẳng định đúng

(A) AD = 3DS   **(B)** AD = 2DS

(C) AS = 3DS   **(D)** AS = DS

Câu 7: Cho hình tứ diện ABCD với P, Q lần lượt là trung điểm của AB và CD. Gọi R là điểm nằm trên cạnh BC sao cho BR = 4RC và S là giao điểm của cạnh AD với mặt phẳng(PQR). Chọn khẳng định đúng

(A) AS = 4SD   **(B)** AS = 3SD

(C) AS = 2SD   **(D)** AS = 5SD

Câu 8: Cho tứ diện ABCD trong đó tam giác BCD không cân. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD và G là trung điểm của đoạn MN. Gọi A_1 là giao điểm của AG và (BCD). Chọn khẳng định đúng

(A) A_1 là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD

(B) A_1 là tâm đường tròn nội tiếp tam giác BCD

(C) A_1 là trực tâm tam giác BCD

(D) A_1 là trọng tâm tam giác BCD

Câu 9: Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC và ABD. Chọn khẳng định đúng

(A) IJ song song với CD   **(B)** IJ song song với AB

(C) IJ chéo CD   **(D)** IJ cắt AB

Câu 10: Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình thang với đáy lớn AB đáy nhỏ CD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và SB. Gọi P là giao điểm của SC và (AND). AN cắt DP tại I. SABI là hình gì?

(A) Hình bình hành   **(B)** Hình chữ nhật

(C) Hình vuông   **(D)** Hình thoi

Câu 11: Cho hai đường thẳng chéo nhau a, b và điểm M ở ngoài a và ngoài b. Có nhiều nhất bao nhiêu đường thẳng qua M cắt cả a và b?

(A) 1   **(B)** 2   **(C)** 0   **(D)** Vô số

Câu 12: Trong không gian cho 3 đường thẳng a, b, c chéo nhau từng đôi. Có nhi nhất bao nhiêu đường thẳng cắt cả ba đường thẳng ấy?

(A) 1 (B) 2 (C) 0 (D) Vô số

Câu 13: Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình thang với đáy lớn AB = 3C Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AD và BC, G là trọng tâm của tam giác SA SDC là tam giác cân tại S. Thiết diện của (IJG) và hình chóp S.ABCD là

(A) Hình thang (B) Hình bình hành

(C) Tứ giác không phải hình thang (D) Hình chữ nhật

Câu 14: Cho hai hình vuông ABCD và CDIS không thuộc một mặt phẳng và cạnh bằng 4. Biết tam giác SAC cân tại S, SB = 8. Thiết diện của mp(ACI) và hì chóp S.ABCD có diện tích bằng

(A) $6\sqrt{2}$ (B) $8\sqrt{2}$ (C) $10\sqrt{2}$ (D) $9\sqrt{2}$

TRẢ LỜI

Câu 1:

(A) Khẳng định đúng

(B) Khẳng định sai. Phát biểu đúng như sau: Hai đường thẳng không có đi chung thì song song hoặc chéo nhau

(C) Khẳng định sai

(D) Khẳng định đúng

Câu 2: (D)

Câu 3:

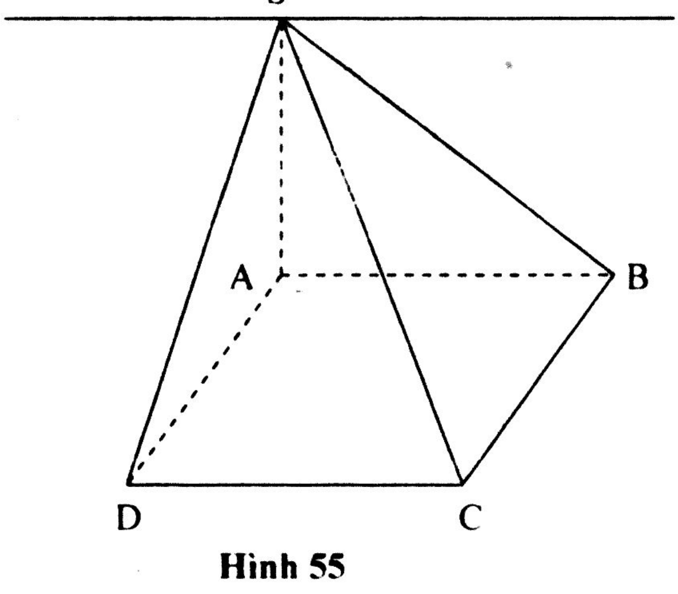
(A) Khẳng định sai **(B)** Khẳng định sai **(C)** Khẳng định đú

Câu 4: Ta có

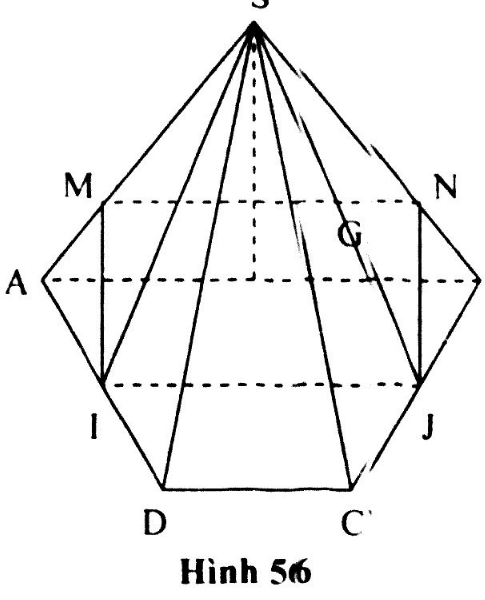
S ∈ (SAB) ∩ (SCD), AB ⊂ (SAB), CD ⊂ (SCD) và AB // CD

Vậy giao tuyến của (SAB) và (SCD) là đường thẳng qua S và song song với (

ĐS: (A) (xem Hình 55)



Hình 55



Hình 56

Câu 5: (xem Hình 56)

Rõ ràng $G \in (SAB) \cap (IJG)$

Lại có $AB \parallel IJ$

Nên giao tuyến của (SAB) và (IJG) là đường thẳng qua G và song song với DC

ĐS: (C)

Câu 6:

Vì $PR \parallel AC$ nên $QS \parallel AC$

Vậy S là giao điểm của AD và đường thẳng qua Q và song song với PR

Theo định lí Talet ta có: $AS = 2SD$ hay $AD = 3DS$

ĐS: (A)

Câu 7: (xem Hình 57)

Nối QR cắt BD tại S', nối S'P cắt AD tại S. S là giao điểm của AD và (PQR)

Để tính tỉ số nêu ra ở câu trắc nghiệm ta giải như sau:

Gọi P' và Q' lần lượt là trung điểm của AD và BC. Ta có:

$$\frac{S'B}{QQ'} = \frac{RB}{RQ'} = \frac{4}{\frac{3}{2}} = \frac{8}{3} \Rightarrow \frac{S'D + DB}{QQ'} = \frac{8}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{S'D}{QQ'} + \frac{DB}{QQ'} = \frac{8}{3} \quad (*)$$

Do QQ' là đường trung bình của tam giác BDC nên $\frac{DB}{QQ'} = 2$, vì vậy từ (*) ta có:

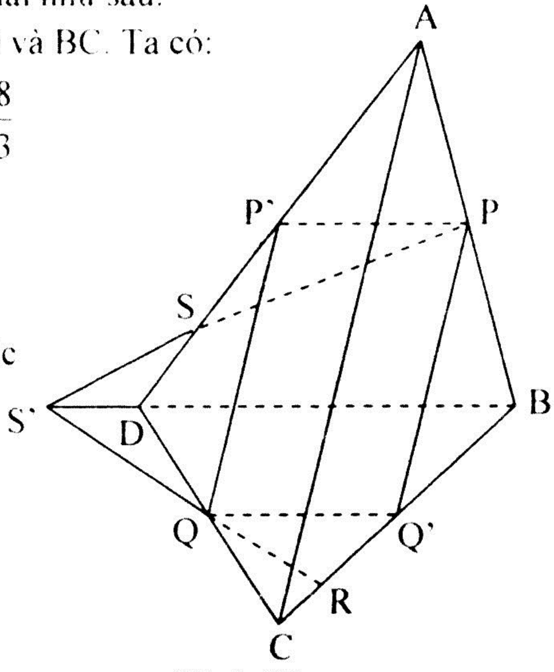
$$\frac{S'D}{QQ'} = \frac{8}{3} - 2 = \frac{2}{3}$$

Vì $QQ' = PP'$ nên $\frac{S'D}{PP'} = \frac{2}{3}$

Lại theo định lí Talet ta có

$$\frac{SD}{SP'} = \frac{SD}{SP} = \frac{2}{3} \Rightarrow AS = 4SD$$

ĐS: (A)



Hình 57

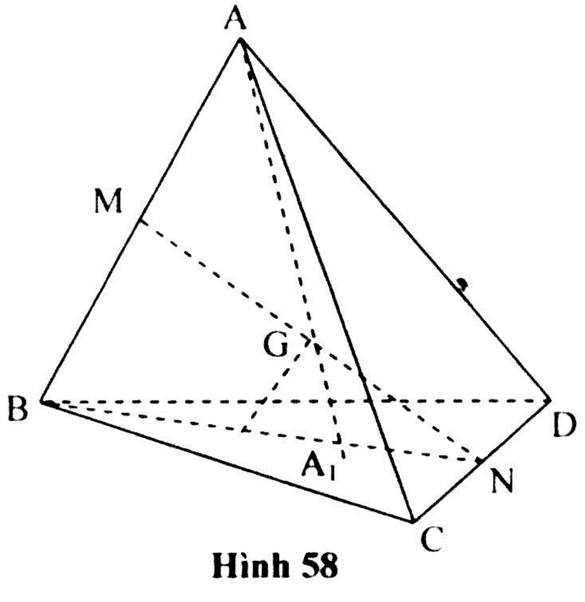
Câu 8: (xem Hình 58)

Lấy điểm I trên BN sao cho $GI \parallel BM$

GI là đường trung bình của ΔMBN

Nên $GI = \frac{1}{2}BM = \frac{1}{4}BA$

$$\frac{GI}{AB} = \frac{A'I}{A'B} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{A'B - BI}{A'B} = \frac{1}{4}$$



Hình 58

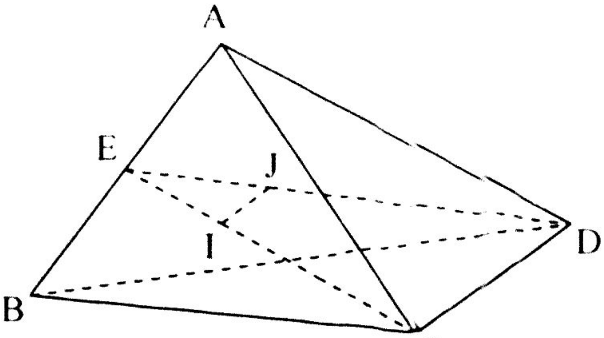
Hay: $1 - \frac{BI}{A'B} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{BI}{A'B} = \frac{3}{4}$

Lại do 2BI = BN

Nên $\frac{BN}{A'B} = \frac{3}{2}$

Vậy A' là trọng tâm tam giác BCD

ĐS: (D)



Hình 59

Câu 9: (xem Hình 59)

Gọi E là trung điểm của AB ta có

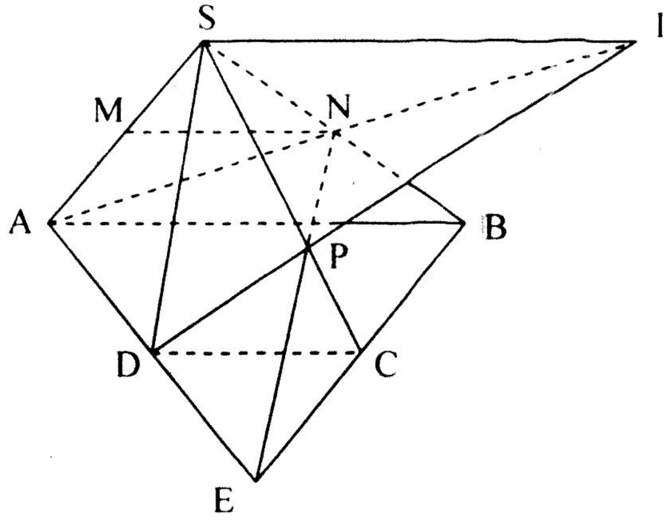
IJ và CD cùng thuộc mp(CED)

Lại do: $\frac{EI}{EC} = \frac{EJ}{ED} = \frac{1}{3}$ (tính chất trọng tâm)

I thuộc cạnh EC, J thuộc cạnh ED

$\Rightarrow$ IJ // CD

ĐS: (A)



Hình 60

Câu 10: (xem Hình 60)

Gọi E = AD $\cap$ BC, P = NE $\cap$ SC

$\Rightarrow$ P = SC $\cap$ (AND)

Vì SI = (SAB) $\cap$ (SCD)

Mà: AB // CD

$\Rightarrow$ SI // AB //CD

Vì NM là đường trung bình của Δ SAI và ΔSAB

$\Rightarrow$ SI = AB

Vậy SABI là hình bình hành

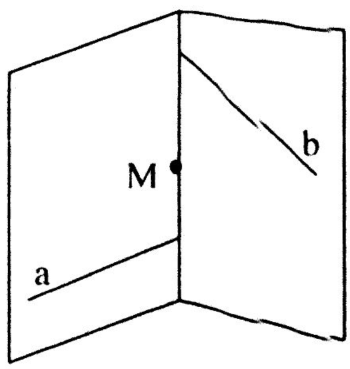
ĐS: (A)

Câu 11: Đây thực chất là bài toán dựng hình trong không gian (xem Hình 61)

Đường thẳng qua M và cắt a và b là giao tuyến của mp(a, M) và mp(b, M)

Vì hai mặt phẳng nói trên là phân biệt và có một điểm chung nên chỉ có nhiều nhất một giao tuyến

ĐS: (A)



Hình 61

Câu 12:

Với mỗi điểm M trên a theo bài toán 11 có một đường thẳng qua M và cắt b, c (có nghĩa là đường thẳng này cắt cả ba đường thẳng a, b, c)

Vì M lấy tùy ý nên có có vô số đường thẳng cắt a, b, c

ĐS: (D)

Câu 13: (xem Hình 62)

(IJG) và (SAB) có điểm chung G

IJ ⊂ (IJG), AB ⊂ (SAB), IJ // AB

⇒ Giao tuyến của (IJG) và (SAB) là đường thẳng d qua G và song song với AB

Gọi M, N là giao điểm của d với SA và SB

Thiết diện là hình thang IJNM

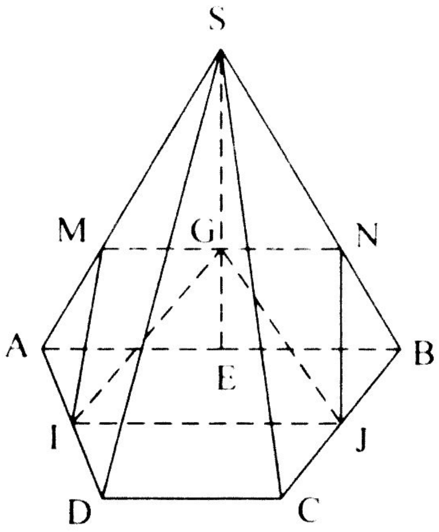
Ta có $IJ = \dfrac{AB + CD}{2} = 2CD$

Theo định lí Talet: $\dfrac{MN}{AB} = \dfrac{SG}{SE} = \dfrac{2}{3}$

$\Rightarrow MN = \dfrac{2}{3}AB = 2CD$

Vậy IJNM là hình bình hành

ĐS: (B)



Hình 62

Câu 14: (xem Hình 63)

Gọi K là giao điểm của CI và DS

Thiết diện của mp(ACI) và hình chóp S.ABCD là tam giác ACK

$\Delta SAD = \Delta SDC$ (c−c−c)

$\Rightarrow AK = CK$

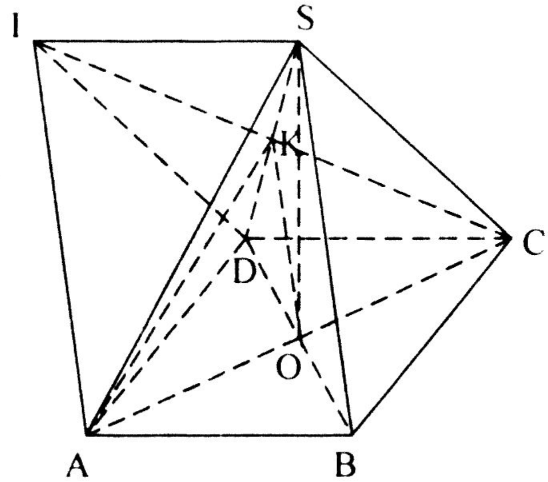
Vậy ACK cân tại K, có trung tuyến KO còn là đường cao

$KO = 0,5SB = 4$

$AC = 4\sqrt{2}$

$\Rightarrow S(KAC) = 0,5.KO.AC = 8\sqrt{2}$

ĐS: (B)



Hình 63

§3. ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI MẶT PHẲNG

TÓM TẮT LÍ THUYẾT

I. Vị trí tương đối:

Cho đường thẳng d và mặt phẳng (α), ta có ba vị trí tương đối như sau:

1. d và (α) cắt nhau tại M, kí hiệu $d \cap (\alpha) = M$

2. d song song với (α), kí hiệu $d \,//\, (\alpha)$ hoặc $(\alpha) \,//\, d$

3. d nằm trong (α), kí hiệu $d \subset (\alpha)$

II. Tính chất:

1. Nếu đường thẳng d không nằm trong mặt phẳng (α) và d song song với đường thẳng d_1 nằm trong (α) thì d song song với (α)

2. Cho đường thẳng d song song với mặt phẳng (α). Nếu mặt phẳng (β) chứa d và cắt (α) theo giao tuyến d_1 thì d_1 song song với d

3. Nếu hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng cũng song song với đường thẳng đó

4. Cho hai đường thẳng chéo nhau. Có duy nhất một mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia

CÁC DẠNG TOÁN CƠ BẢN

I. Dạng toán 1: Chứng minh đường thẳng song song với mặt phẳng

Phương pháp: Chứng minh đường thẳng đó không thuộc mặt phẳng và song song với một đường thẳng nào đó thuộc mặt phẳng đó

VD: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB, CD

a) Chứng minh MN song song với (SBC) và (SAD)

b) Gọi P là trung điểm của SA. Chứng minh SB, SC đều song song với (MNP)

Giải

a) Rõ ràng $MN \,//\, BC$, $(SBC) \supset BC$, $MN \not\subset (SBC)$

Vì vậy $MN \,//\, (SBC)$

Chứng minh tương tự $MN \,//\, (SAD)$

b) Theo tính chất đường trung bình thì $SB \,//\, MP$

Mặt khác $MP \subset (MNP)$, $SB \not\subset (MNP)$

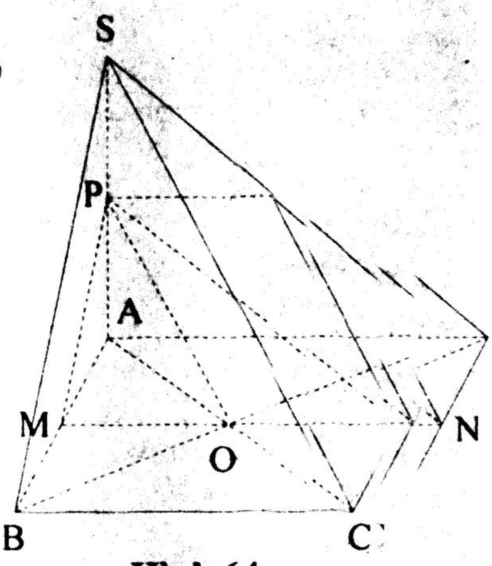
Vì vậy $SB \,//\, (MNP)$

Gọi O là tâm của hình bình hành ABCD

Theo tính chất của đường trung bình ta có $SC \,//\, PO$

Mặt khác $PO \subset (MNP)$, $SC \not\subset (MNP)$

Vì vậy $SC \,//\, (MNP)$ (xem Hình 64)



Hình 64

II. Dạng toán 2: Thiết diện song song với một đường thẳng

Phương pháp: Thường sử dụng định lí sau: Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (P). Nếu mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng thẳng a và cắt (P) theo giao tuyến b thì a // b

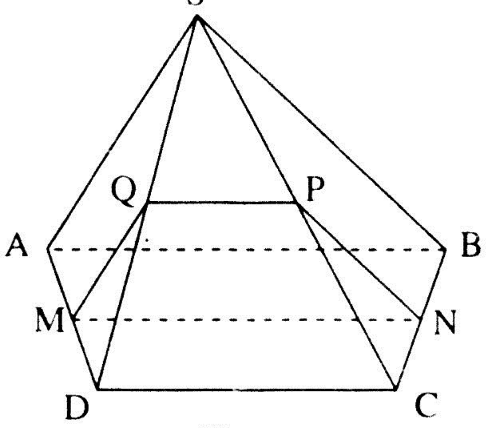
VD1: Cho hình chóp S.ABCD với ABCD là hình thang đáy lớn AD. M, N lần lượt là hai trung điểm của AB và CD. (P) là mặt phẳng qua MN và cắt mặt bên SBC theo một đoạn giao tuyến. Xác định thiết diện của (P) và hình chóp

Giải

MN là đường trung bình của hình thang ABCD nên NM // BC (xem Hình 65)

Gọi PQ là đoạn giao tuyến của (P) và mặt SBD, ta có PQ // BC // MN

Vậy MPNQ hình thang



Hình 65

VD2: Cho tứ diện ABCD điểm M trên cạnh BC. mp(P) qua M song song với AB và CD. (P) cắt BD, AD, AC lần lượt tại N, P, Q. MNPQ là hình gì?

Giải

Vì: (P) // AB, (ABC) ⊃ AB, (ABC) ∩ (P) = MQ

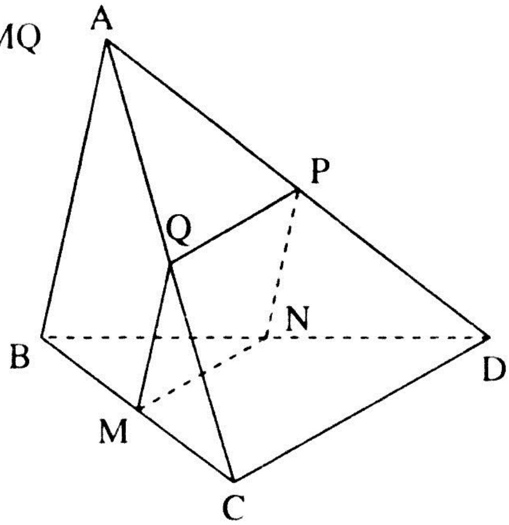
Vậy MQ // AB (1) (xem Hình 66)

Chứng minh tương tự ta có NP // AB (2)

(1) và (2) ⇒ MQ // NP

Cũng chứng minh tương tự ta có MN // PQ

Vậy MNPQ là hình bình hành



Hình 66

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho đường thẳng a và mp(P) trong không gian. Có bao nhiêu vị trí tương đối của a và (P)

(A) 2 **(B)** 3 **(C)** 1 **(D)** 4

Câu 2: Cho hai đường thẳng phân biệt a và b cùng song song với mp(P). Có bao nhiêu vị trí tương đối của a và b?

(A) 2 **(B)** 3 **(C)** 1 **(D)** 4

Câu 3: Cho mp(P) và hai đường thẳng song song a và b. Chọn khẳng định đúng?

(A) Nếu (P) song song với a thì (P) cũng song song với b

(B) Nếu (P) cắt a thì (P) cũng cắt b

(C) Nếu (P) chứa a thì (P) cũng chứa b

(D) Các khẳng định ở (A), (B), (C) đều sai

Câu 4: Cho hai đường thẳng chéo nhau a, b. Chọn khẳng định sai?

(A) Có duy nhất một mặt phẳng song song với a và b

(B) Có duy nhất một mặt phẳng qua a và song song với b

(C) Có duy nhất một mặt phẳng qua điểm M cho trước và song song với a và hoặc chứa một trong hai đường thẳng này

(D) Có vô số đường thẳng song song với a và cắt b

Câu 5: Trong các điều kiện sau, điều kiện nào kết luận hai đường thẳng a, b song song nhau

(A) a // c và c // b

(B) a ⊥ c và b ⊥ c và a ≠ b

(C) a // mp(P) và b // mp(P) và a ≠ b

(D) a // (P) và a // (Q) và b = (P) ∩ (Q)

Câu 6: Cho tứ diên ABCD. Gọi M, N, P, Q, R, S theo thứ tự là trung điểm của cạnh AC, BD, AB, CD, AD, BC. Bốn điểm nào sau đây không đồng phẳng?

(A) P, Q, R, S

(B) M, P, R, S

(C) M, R, S, N

(D) M, N, P, Q

Câu 7: Cho tứ diện ABCD. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABD, Q thuộc cạnh AB sao cho AQ = 2QB, P là trung điểm của AB. Chọn khẳng định đúng?

(A) GP // (BCD)

(B) GQ // (BCD)

(C) GQ cắt (BCD)

(D) Q thuộc mặt phẳng (CDP)

Câu 8: Cho hai hình bình hành ABCD và ABEF không cùng nằm trong một mặt phẳng. Gọi O, O_1 là tâm của ABCD và ABEF, M là trung điểm của CD. Chọn khẳng định sai

(A) OO_1 // (BEC)

(B) OO_1 // (AFD)

(B) OO_1 // (EFM)

(D) MO_1 cắt (BEC)

Câu 9: Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình bình hành. Giao tuyến của mp(SAD) và mp(SBC) là đường thẳng song song với đường thẳng nào sau đây?

(A) AC

(B) BD

(C) AD

(D) SC

Câu 10: Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J lần lượt thuộc cạnh AD, BC sao cho IA = 2ID, JB = 2JC. Gọi (P) là mặt phẳng qua IJ và song song với AB. Chọn khẳng định đúng?

(A) (P) // CD

(B) CD cắt (P)

(C) IJ // CD

(D) IJ // AB

Câu 11: Cho hình chóp S.ABCD với ABCD là hình thang đáy lớn AD. M, N lần lượt là hai trung điểm của AB và CD. (P) là mặt phẳng qua MN và cắt mặt bên SBC theo một đoạn giao tuyến. Thiết diện của (P) và hình chóp là

(A) Hình bình hành

(B) Hình thang

(C) hình chữ nhật

(D) Hình vuông

Câu 12: Cho tứ diện ABCD, điểm M trên cạnh BC. mp(P) qua M song song với AB và CD. (P) cắt BD, AD, AC lần lượt tại N, P, Q. MNPQ là hình gì?

(A) Hình thang

(B) Hình bình hành

(C) Hình chữ nhật

(D) Hình vuông

Câu 13: Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J lần lượt thuộc cạnh AD, BC sao cho IA = 2ID, JB = 2JC. Gọi (P) là mặt phẳng qua IJ và song song với AB. Thiết diện của (P) và tứ diện ABCD là

(A) Hình thang **(B)** Hình bình hành

(C) Hình tam giác **(D)** Tam giác đều

Câu 14: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành ABCD tâm O. Gọi M là điểm thuộc cạnh SA (không trùng với S hoặc A), (P) là mặt phẳng qua OM và song song với AD. Thiết diện của (P) và hình chóp là

(A) Hình bình hành **(B)** Hình thang

(C) Hình chữ nhật **(D)** Hình tam giác

Câu 15 Cho tứ diện đều ABCD cạnh a = 3. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD. Gọi (P) là mặt phẳng qua AO và song song với BD. Gọi M, N là giao điểm của (P) với BC và CD. Độ dài của AM bằng bao nhiêu?

(A) $\sqrt{7}$ **(B)** 3 **(C)** $\sqrt{6}$ **(D)** 2

Câu 16 Cho ba đường thẳng chéo nhau từng đôi a, b, c. Gọi (P) là mặt phẳng qua a, (Q) là mặt phẳng qua b sao cho giao tuyến của (P) và (Q) song song với c. Có nhiều nhất bao nhiêu mặt phẳng (P) và (Q) thoả mãn yêu cầu trên?

(A) Một mặt phẳng (P), một mặt phẳng (Q)

(B) Một mặt phẳng (P), vô số mặt phẳng (Q)

(C) Một mặt phẳng (Q) và vô số mặt phẳng (P)

(D) Vô số mặt phẳng (P) và (Q)

TRẢ LỜI

Câu 1: B)

Câu 2: B)

Câu 3: B)

Câu 4: A)

Câu 5:

(A) Từ a // c và c // b ta suy ra a // b hoặc a ≡ b

(B) Từ a ⊥ c và b ⊥ c và a ≠ b ta chỉ suy ra a và b không có điểm chung (song song hoặc chéo nhau)

(C) Từ a // mp(P) và b // mp(P) và a ≠ b ta có tất cả các vị trí tương đối của a và b

ĐS: D)

Câu 6: xem Hình 67)

Theo tính chất của đường trung bình của tam giác ta có

PS // AC // QR

Vậy P, Q, R, S đồng phẳng

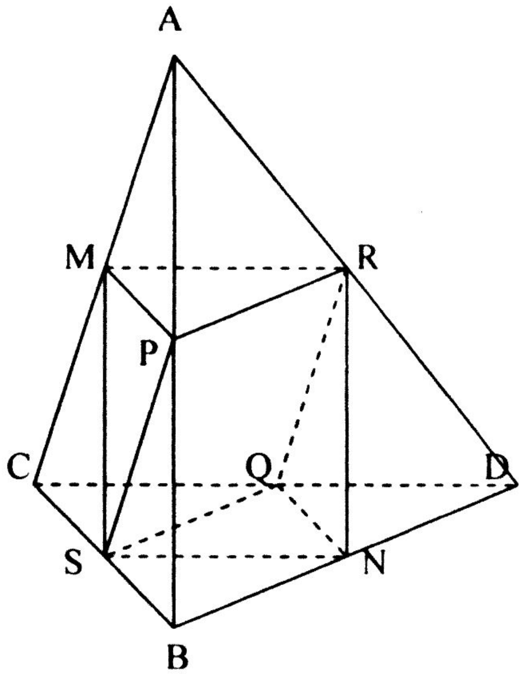
PM // BC // NQ

Vậy P, M, N, Q đồng phẳng

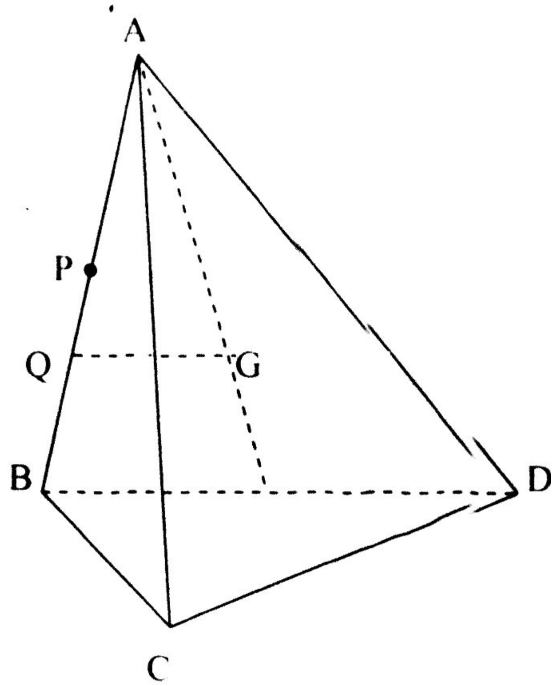
NR // CD // SN

Vậy M, R, S, N đồng phẳng

ĐS: (B)



Hình 67



Hình 68

Câu 7: (xem Hình 68)

Vì $\dfrac{AG}{GM} = \dfrac{AQ}{QB} \Rightarrow GQ \parallel BD$

Lại do $BD \subset (BCD)$. Nên $GQ \parallel (BCD)$

ĐS: (B)

Câu 8: (xem Hình 69)

Vì OO_1 là đường trung bình của tam giác ACE nên $OO_1 \parallel EC$ (1)

Tương tự OO_1 là đường trung bình của tam giác BFD nên $OO_1 \parallel FD$ (2)

Vậy

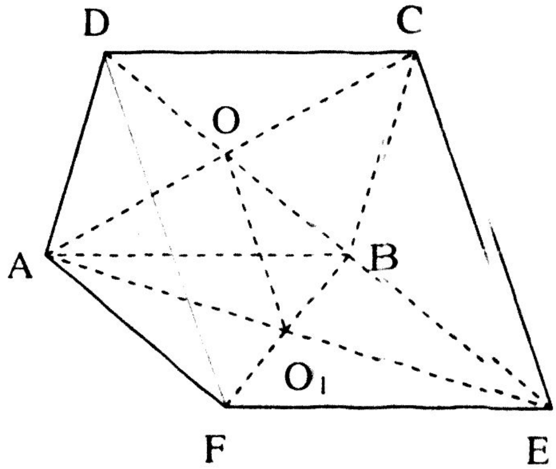
$OO_1 \parallel (BEC)$ (do (1))

$OO_1 \parallel (AFD)$ (do (2))

$OO_1 \parallel (EFC)$ (do (1))

Chú ý rằng $(EFC) \equiv (EFM)$

ĐS: (D)



Hình 69

Câu 9: (bạn đọc tự vẽ hình)

Vì (SAD) và (SBC) có điểm chung là S

Trong (SAD) chứa AD, trong (SBC) chứa BC, mà AD // BC nên

Giao tuyến của (SAD) và (SBC) là đường thẳng đi qua S và song song với AD

ĐS: (C)

Câu 10: (xem Hình 70)

Ta chỉ cần xét khẳng định (A) và (B)

Gọi H là giao điểm của AC và (P)

$(P) \cap (ABC) = JH$, $AB \subset (ABC)$, $AB // (P)$

$\Rightarrow JH // AB$

Theo định lí Talet ta có:

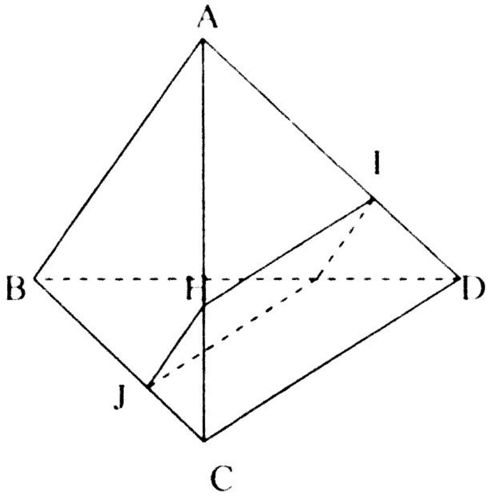
$$\frac{JB}{JC} = \frac{HA}{HC} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{HA}{HC} = \frac{IA}{ID}$$

Vậy $HI // CD$

$\Rightarrow CD // (P)$

ĐS: (A)



Hình 70

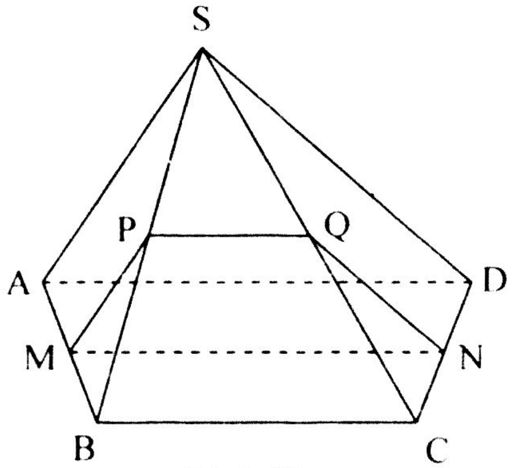
Câu 11: (xem Hình 71)

MN là đường trung bình của hình thang ABCD nên $NM // BC$

Gọi PQ là đoạn giao tuyến của (P) và mặt SBD, ta có $PQ // BC // MN$

Vậy MPNQ là hình thang

ĐS: (B)



Hình 71

Câu 12: (xem Hình 72)

Vì:

$(P) // AB$, $(ABC) \supset AB$,

$(ABC) \cap (P) = MQ$

Vậy $MQ // AB$ (1)

Chứng minh tương tự ta có

$NP // AB$ (2)

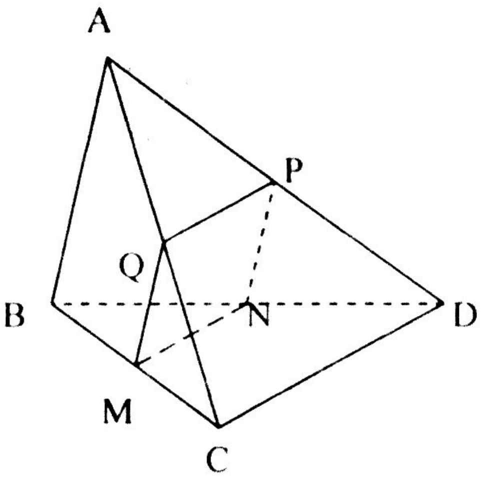
(1) và (2) $\Rightarrow MQ // NP$

Cũng chứng minh tương tự ta có

$MN // PQ$

Vậy MNPQ là hình bình hành

ĐS: (B)



Hình 72

Câu 13: (xem Hình 73)

Giả sử (P) cắt các mặt của tứ diện (ABC) và (ABD) theo hai đoạn giao tuyến JH và IK

Ta có:

$(P) \cap (ABC) = JH$, $(P) \cap (ABD) = IK$

$(ABC) \cap (ABD) = AB$, $(P) // AB$

$\Rightarrow JH // AB // IK$

Theo định lí Talet ta có:

$$\frac{JB}{JC} = \frac{HA}{HC} = 2$$

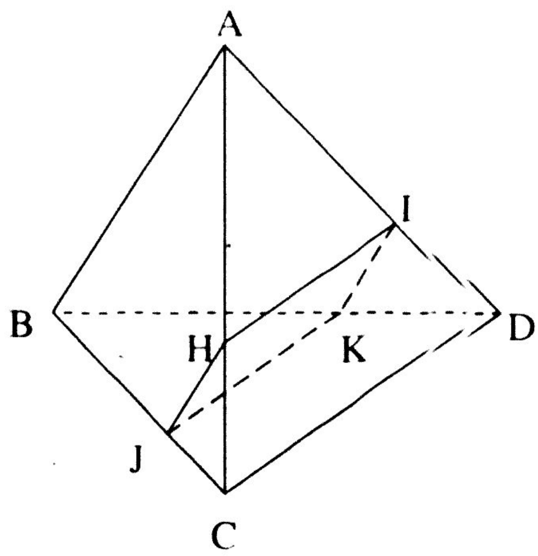
$$\Rightarrow \frac{HA}{HC} = \frac{IA}{ID} \Rightarrow HI // CD$$

$\Rightarrow CD // (P)$

Vậy (P) cắt các mặt (ABC) và (ABD) theo hai đoạn giao tuyến IH và JK với IH // JK

Vậy JHIK là hình bình hành

ĐS: (B)



Hình 73

Câu 14: (xem Hình 74)

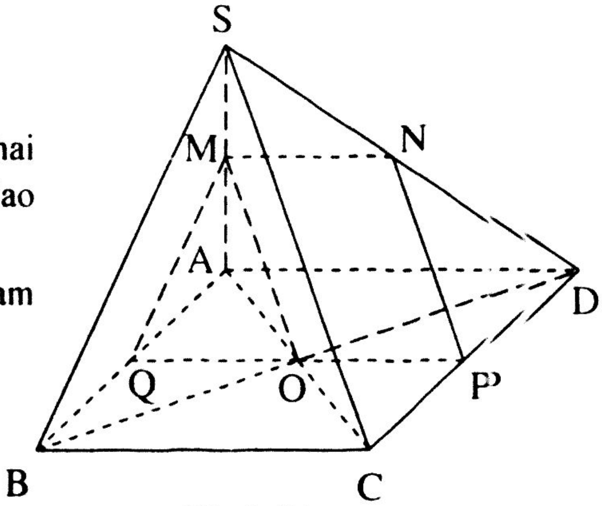
Vì (P) song song với AD nên (P) cắt hai mặt phẳng (SAD) và (ABCD) theo hai giao tuyến MN và QP song song với AD

Lại do MN là đường trung bình của tam giác SAD nên AD = 2NM

Mà AD = QP nên QP = 2MN

Vậy thiết diện là hình thang

ĐS: (B)



Hình 74

Câu 15: (Xem Hình 75)

Vì $(P) // BD$, $BD \subset (BCD)$, $(P) \cap (BCD) = MN$

$\Rightarrow MN // BD$

Tam giác BCD đều nên O còn là trọng tâm. Gọi K là trung điểm BD.

Ta có: CK = 3KO

Theo định lí Talet BC = 3BM

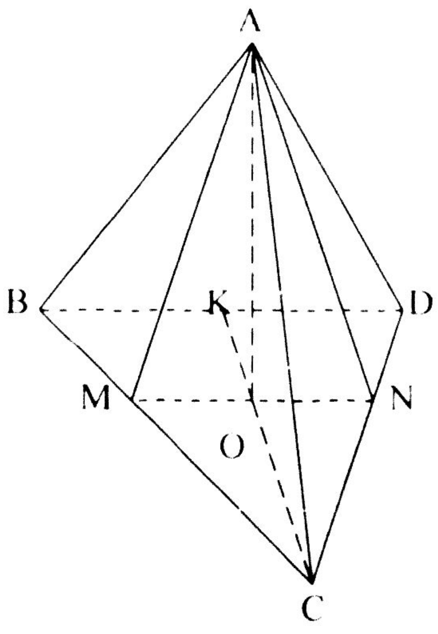
Vậy $BM = DN = \frac{a}{3} = 1$

Áp dụng định lí Côsin cho tam giác ABM ta có:

$$AM^2 = AB^2 + BM^2 - 2AB.BM\cos 60^0 = a^2 + \frac{a^2}{9} - \frac{a^2}{3} = \frac{7a^2}{9} = 7$$

Vậy $AM = \sqrt{7}$.

ĐS: (A)



Hình 75

Câu 16: Đây là bài toán dựng hình, từ cách dựng suy ra số mặt phẳng (P) và (Q)

Dựng mp(P) qua a và song song với c, vì a, c chéo nhau nên có duy nhất mp(P)

Dựng mp(Q) qua b và song song với c, vì b, c chéo nhau nên có duy nhất mp(Q)

Giao tuyến (nếu có) của (P) và (Q) song song với c

ĐS: (A)

§4. MẶT PHẲNG SONG SONG

TÓM TẮT LÍ THUYẾT

I. Định nghĩa: Hai mặt phẳng (P) và (Q) gọi là song song với nhau nếu chúng không có điểm chung, kí hiệu (P) // (Q)

II. Tính chất:

1. Nếu mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng cắt nhau a, b và hai đường thẳng này song song với mặt phẳng (Q) thì (P) song song với (Q)

2. Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng cho trước có một và chỉ một mặt phẳng song song với mặt phẳng đã cho

3. Nếu đường thẳng d song song với mặt phẳng (P) thì trong (P) có một đường thẳng song song với d và qua d có duy nhất một mặt phẳng song song với (P)

4. Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì song song nhau

5. Cho điểm A không nằm trong mặt phẳng (P). Mọi đường thẳng đi qua A và song song với (P) đều nằm trong mặt phẳng đi qua A và song song (P)

6. Cho hai mặt phẳng song song nhau. Nếu một mặt phẳng cắt mặt phẳng này thì phải cắt mặt phẳng kia và hai giao tuyến tương ứng song song nhau

7. Hai mặt phẳng song song chắn trên hai cát tuyến song song những đoạn thẳng bằng nhau

8. Định lí Talét: Ba mặt phẳng đôi một song song chắn trên hai cát tuyến bất kì những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ

CÁC DẠNG TOÁN CƠ BẢN

I. Dạng toán 1: Chứng minh hai mặt phẳng song song nhau

Phương pháp: Có thể sử dụng hai cách sau:

- Chứng minh chúng phân biệt và cùng song song với mặt phẳng thứ ba
- Chứng minh trong mặt phẳng này chứa hai đường thẳng cắt nhau cùng song song với mặt phẳng kia

VD: Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình bình hành ABCD tâm O. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của SA, SD. Chứng minh (MON) // (SBC)

Giải

Ta chứng minh (MON) // (SBC) (xem Hình 76)

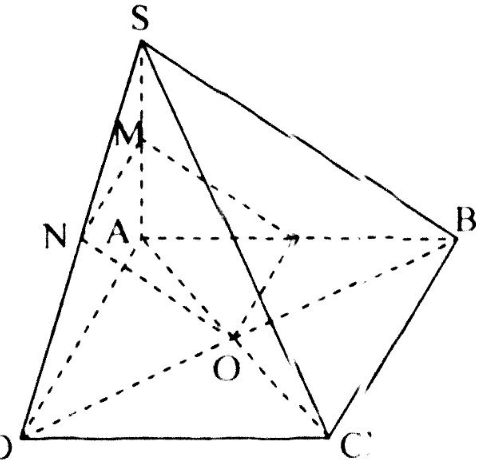
MN là đường trung bình của tam giác SAD nên MN // AD

Mà AD // BC, nên MN // BC (1)

Tương tự

NO // SB (2)

(1), (2) và do SB cắt BC nên (MON) // (SBC)



Hình 76

II. Dạng toán 2: Chứng minh đường thẳng song song với mặt phẳng

Phương pháp: Có thể sử dụng hai cách sau:

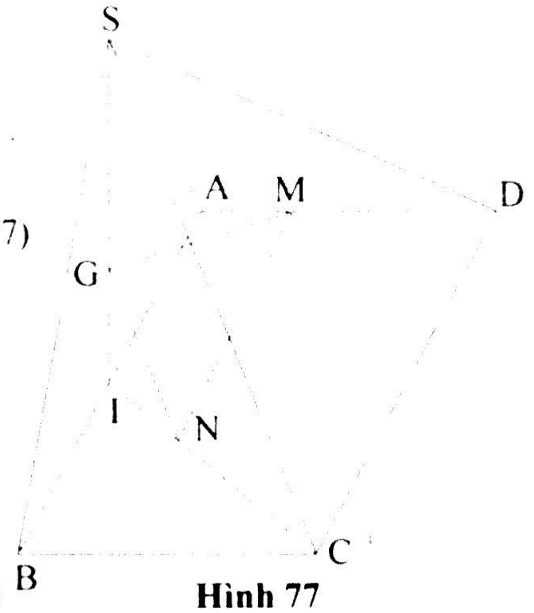
- Chứng minh đường thẳng đó không thuộc mặt phẳng và song song với một đường thẳng nào đó thuộc mặt phẳng đó (xem phần đường thẳng song song với mặt phẳng)
- Chứng minh đường thẳng đó thuộc một mặt phẳng khác song song với mặt phẳng đã cho

VD1: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi G là trọng tâm của tam giác SAB và I là trung điểm của AB. Lấy điểm M trên đoạn AD sao cho AD = 3AM. Từ M kẻ đường thẳng song song với DC cắt IC tại N

a) Chứng minh NG // (SCD)

b) Chứng minh MG // (SCD)

Giải



Hình 77

a) Ta có $\frac{IN}{IC} = \frac{AM}{AD} = \frac{1}{3}$ (1)

(Do AI // MN // DC)

Theo tính chất của trọng tâm ta có (xem Hình 77)

$\frac{IG}{IS} = \frac{1}{3}$ (2)

(1) và (2) $\Rightarrow \frac{IN}{IC} = \frac{IG}{IS} \Rightarrow$ NG // SC

$\Rightarrow$ NG // (SCD)

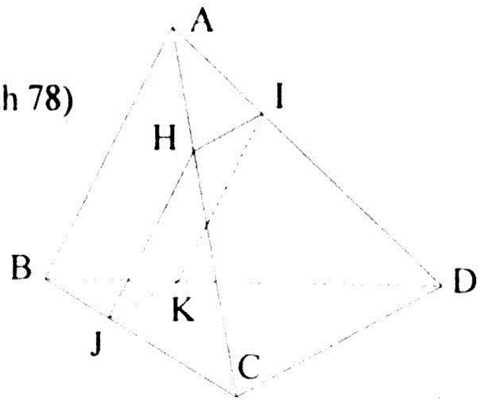
b) Xét hai mặt phẳng (MNG) và (SCD)

MN // CD, NG // SC $\Rightarrow$ (MNG) // (SCD)

Lại do MG $\subset$ (MNG) $\Rightarrow$ MG // (SCD)

VD2: Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J là hai điểm di động lần lượt trên hai cạnh AD, BC sao cho $\frac{IA}{ID} = \frac{JB}{JC}$. Chứng minh IJ luôn song song với một mặt phẳng cố định

Giải



Hình 78

Qua I vẽ IH // CD (*), H thuộc cạnh AC (xem Hình 78)

Theo định lí Talet: $\frac{HA}{HC} = \frac{IA}{ID}$

Mà: $\frac{IA}{ID} = \frac{JB}{JC}$

$\Rightarrow \frac{HA}{HC} = \frac{JB}{JC} \Rightarrow$ HJ // AB (**)

Gọi (P) là mặt phẳng qua AB và song song với CD, (P) là mặt phẳng cố định

(*), (**) suy ra (IJH) // (P)

$\Rightarrow$ IJ // (P)

III. Dạng toán 3: Thiết diện của mặt phẳng (P) và hình chóp, biết (P) sor song với mặt phẳng (Q) cho trước

Phương pháp: Sử dụng các kết quả sau: (P) // (Q) suy ra (P) song song với t cả các đường thẳng thuộc (Q)

Thực hành như sau: Tìm trong (Q) đường thẳng d (đã có), vì d // (P), nên (P) c tất cả các mặt phẳng chứa d theo các giao tuyến song song (hoặc trùng) với d

VD: Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình bình hành tâm O. SDB là tam giác đề Một mặt phẳng (P) song song với (SBD) và qua điểm I thuộc cạnh AC (khôr trùng với A hoặc C).

a) Xác định thiết diện của (P) và hình chóp

b) Cho I là trung điểm của OA, ABCD là hình chữ nhật với AB = 3, BC = Tính diện tích của thiết diện của (P) và hình chóp

Giải

a) (xem Hình 79)

Gọi MN là đoạn giao tuyến của (P) và mặt đáy của hình chóp

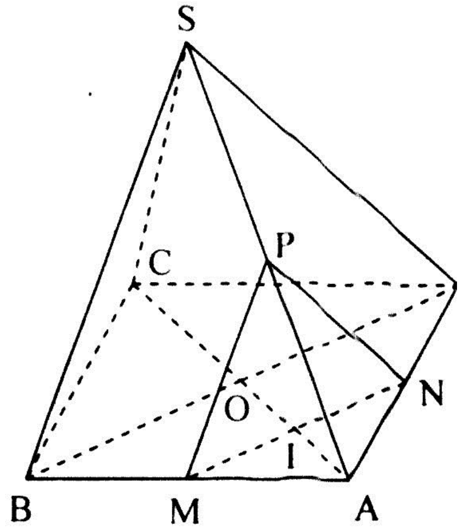
Vì (P) // (SBD), (P) $\cap$ (ABCD) = MN, (SBD) $\cap$ (ABCD) = BD

$\Rightarrow$ MN // BD

Lí luận tương tự ta có (P) cắt mặt (SDA) theo đoạn giao tuyến NP với NP // SD

(P) cắt mặt (SAB) theo đoạn giao tuyến MP với MP // SB

Vậy tam giác MNP đồng dạng với tam giác SBD nên thiết diện là tam giác đều MNP



Hình 79

b) $BD = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 5$

$$S(SBD) = \frac{1}{2} SB.SD.\sin 60^0 = \frac{25\sqrt{3}}{4}$$

Vì ΔPMN đồng dạng ΔSBD, nên

$$\frac{S(PMN)}{S(SBD)} = \left(\frac{PM}{SB}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow S(PMN) = \frac{25\sqrt{3}}{16}$$

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Trong các điều kiện sau, điều kiện nào kết luận đường thẳng a song sol với mp(P)?

(A) a // b và b $\subset$ (P) **(B)** a // b và b // (P)

(C) a // mp(Q) và (Q) // (P) **(D)** a $\subset$ (Q) và (Q) // (P)

Câu 2: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng, mệnh đề nào sai?

(A) Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì song song nhau

☐ đúng, ☐ sai

(B) Hai mặt phẳng cùng song song với một mặt phẳng thứ ba thì song song nhau

☐ đúng, ☐ sai

(C) Hai mặt phẳng song song, bất cứ đường thẳng nào cắt một mặt phẳng thì phải cắt mặt phẳng còn lại ☐ đúng, ☐ sai

Câu 3: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng, mệnh đề nào sai?

(A) Nếu hai mặt phẳng song song, đường thẳng nằm trong một mặt phẳng thì song song với mặt phẳng còn lại ☐ đúng, ☐ sai

(B) Nếu hai mặt phẳng song song thì mọi đường thẳng nằm trên một mặt phẳng đều song song với bất kì đường thẳng nào nằm trên mặt phẳng còn lại

☐ đúng, ☐ sai

(C) Hai mặt phẳng phân biệt cùng đi qua hai đường thẳng song song thì song song nhau ☐ đúng, ☐ sai

(D) Nếu một mặt phẳng cắt một trong hai mặt phẳng song song thì cắt mặt phẳng còn lại ☐ đúng, ☐ sai

Câu 4: Trong không gian cho hai mặt phẳng, có mấy vị trí tương đối của hai mặt phẳng này?

(A) 2 **(B)** 3 **(C)** 4 **(D)** 1

Câu 5: Trong các điều kiện sau, điều kiện nào kết luận mp(α) // mp(β)?

(A) (α) // (γ) và (β) // (γ) ((γ) là mặt phẳng nào đó)

(B) (α) // a và (α) // b với a, b là hai đường thẳng phân biệt thuộc (β)

(C) (α) // a và (α) // b với a, b là hai đường thẳng phân biệt cùng song song với (β)

(D) (α) // a và (α) // b với a, b là hai đường thẳng cắt nhau thuộc (β)

Câu 6: Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề đúng

(A) Nếu (α) // (β) và $a \subset (\alpha)$, $b \subset (\beta)$ thì a // b

(B) Nếu (α) // (β) và $a \subset (\alpha)$, $b \subset (\beta)$ thì a và b chéo nhau

(C) Nếu a // b và $a \subset (\alpha)$, $b \subset (\beta)$ thì (α) // (β)

(D) Nếu $(\gamma) \cap (\alpha) = a$, $(\gamma) \cap (\beta) = b$ và (α) // (β) thì a // b

Câu 7: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai?

(A) Hình hộp là một hình lăng trụ ☐ đúng, ☐ sai

(B) Hình lăng trụ có tất cả các mặt song song ☐ đúng, ☐ sai

(C) Hình lăng trụ có tất cả các mặt bên bằng nhau ☐ đúng, ☐ sai

(D) Hình lăng trụ có tất cả các mặt bên là hình bình hành ☐ đúng, ☐ sai

Câu 8: Cho hai mặt phẳng song song (α) và (β), đường thẳng a // (α). Có mấy vị trí tương đối của a và (β)?

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4

Câu 9: Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình bình hành ABCD tâm O. Gọi M, N, I theo thứ tự là trung điểm của SA, SD và AB. Chọn khẳng định đúng?

(A) (NOM) cắt (OPM) **(B)** (MON) // (SBC)

(C) (PON) $\cap$ (MNP) = NP **(D)** (NMP) // (SBD)

Câu 10: Cho hai hình vuông ABCD và ABEF không cùng thuộc một mặt phẳng Trên đoạn AC và BF lần lượt lấy M, N sao cho AM = BN. Đường thẳng song son với AB kẻ từ M, N lần lượt cắt AD, AF tại M_1 và N_1. Chọn khẳng định sai

(A) (ADF) // (CBE) **(B)** $(M_1N_1N) \cap (MNM_1) = M_1N$

(C) (MM_1N) // (CDE) **(D)** AB // (MM_1N)

Câu 11: Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình bình hành tâm O. SDB là tam giá đều. Một mặt phẳng (P) song song với (SBD) và qua điểm I thuộc cạnh AC (khôn trùng với A hoặc C). Thiết diện của (P) và hình chóp là hình gì?

(A) Hình bình hành **(B)** Tam giác cân

(C) Tam giác vuông **(D)** Tam giác đều

Câu 12: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi M là điểm trên cạnh SB. Thiết diện của mặt phẳng (ADM) và hình chóp S.ABCD là hình

(A) Tam giác **(B)** Hình thang

(C) Hình bình hành **(D)** Hình chữ nhật

Câu 13: Cho hình chóp S.ABC với đáy là tam giác ABC thoả mãn AB = AC = 4 A = 30^0. Mặt phẳng (P) song song với (ABC) cắt đoạn SA tại M sao cho SM = 2MA. Diện tích thiết diện của (P) và hình chóp S.ABC bằng bao nhiêu?

(A) $\frac{16}{9}$ **(B)** $\frac{14}{9}$ **(C)** $\frac{25}{9}$ **(D)** 1

Câu 14: Cho hình chóp S.ABCD với đáy ABCD là hình thang cân với cạnh bê BC = 2, hai đáy AB = 6, CD = 4. Mặt phẳng (P) song song với (ABCD) và cắ cạnh SA tại M sao cho SA = 3SM. Diện tích thiết diện của (P) và hình chó S.ABCD bằng bao nhiêu?

(A) $\frac{5\sqrt{3}}{9}$ **(B)** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ **(C)** 2 **(D)** $\frac{7\sqrt{3}}{9}$

Câu 15: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành có tâm O, AB = 8 SA = SB = 6. (P) là mặt phẳng qua O và song song với (SAB). Thiết diện của (P và hình chóp có diện tích bằng

(A) $5\sqrt{5}$ **(B)** $6\sqrt{5}$ **(C)** 12 **(D)** 13

Câu 16: Cho hình lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$. Trong các khẳng định sau, khẳng địn nào sai?

(A) (ABC) // $(A_1B_1C_1)$ **(B)** AA_1 // (BCC_1)

(C) AB // $(A_1B_1C_1)$ **(D)** AA_1B_1B là hình chữ nhật

Câu 17: Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Chọn khẳng định sai?

(A) ABCD là hình bình hành

(B) Các đường thẳng A_1C, AC_1, DB_1, D_1B đồng qui

(C) $(ADD_1A_1) // (BCC_1B_1)$

(D) AD_1CB là hình chữ nhật

Câu 18: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A_1B_1C_1$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AA_1, AC. Thiết diện của hình lăng trụ và (MNB_1) là

(A) Tam giác **(B)** Hình thang

(C) Hình chữ nhật **(D)** Tứ giác không phải hình thang

Câu 19: Cho lăng trụ tam giác $ABC.A_1B_1C_1$. Gọi H là trung điểm của A_1B_1. Mặt phẳng (AHC_1) song song với đường thẳng nào sau đây?

(A) CB_1 **(B)** BB_1 **(C)** BC **(D)** BA_1

Câu 20: Cho hình lăng trụ tứ giác $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Gọi I, J, K, L lần lượt là trung điểm của A_1C_1, B_1D_1, BD, AC. IJKL là hình gì?

(A) Tứ giác không phải hình thang

(B) Hình thang không phải là hình bình hành

(C) Hình bình hành

(D) Hình chữ nhật

Câu 21: Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, CC_1, C_1D_1, AA_1. Mặt phẳng (MNPQ) song song với mặt phẳng nào sau đây?

(A) (A_1BCD_1) **(B)** (A_1BC_1)

(C) $(ABCD)$ **(D)** (A_1BB_1)

Câu 22: Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, CC_1, C_1D_1. Thiết diện của (MNP) và hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ là hình gì?

(A) Lục giác không đều **(B)** Ngũ giác đều

(C) Lục giác đều **(D)** Ngũ giác không đều

Câu 23: Cho lăng trụ tam giác $ABC.A_1B_1C_1$. Gọi I, G, K lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC, ACC_1, $A_1B_1C_1$. mp(IGK) song song với mặt phẳng nào sau đây?

(A) I, G, K thẳng hàng **(B)** $(IGK) // (BB_1C)$

(C) $(IGK) // (AA_1B)$ **(D)** $(IGK) // ((AA_1CC_1)$

Câu 24: Cho hai mặt phẳng song song (P) và (Q). Hai điểm M, N lần lượt thay đổi trên (P) và (Q). Gọi I là trung điểm của MN. Chọn khẳng định đúng

(A) Tập hợp các điểm I là đường thẳng song song và cách đều (P) và (Q)

(B) Tập hợp các điểm I là mặt phẳng song song và cách đều (P) và (Q)

(C) Tập hợp các điểm I là một mặt phẳng cắt (P)

(D) Tập hợp các điểm I là một đường thẳng cắt (P)

TRẢ LỜI

Câu 1:

(A) Từ điều kiện a // b và $b \subset (P)$ ta suy ra a // (P) hoặc $a \subset (P)$

(B) Từ điều kiện a // b và b // (P) ta suy ra a // (P) hoặc $a \subset (P)$

(C) Từ điều kiện a // mp(Q) và (Q) // (P) ta suy ra a // (P) hoặc $a \subset (P)$

ĐS: (D)

Câu 2:

(A) Khẳng định sai

(B) Khẳng định sai. Phát biểu đúng như sau: Hai mặt phẳng cùng song song với một mặt phẳng thứ ba thì song song hoặc trùng nhau

(C) Khẳng định đúng

Câu 3:

(A) Khẳng định đúng **(B)** Khẳng định sai

(C) Khẳng định sai **(D)** Khẳng định đúng

Câu 4: Có ba vị trí tương đối: cắt nhau, song song, trùng nhau

ĐS: (B)

Câu 5: (D)

Câu 6:

Khẳng định (A) và (B) không đúng. Phát biểu đúng như sau

Nếu $(\alpha) // (\beta)$ và $a \subset (\alpha)$, $b \subset (\beta)$ thì a // b hoặc a và b chéo nhau

Khẳng định (C) không đúng. Phát biểu đúng như sau:

Nếu a // b và $a \subset (\alpha)$, $b \subset (\beta)$ thì $(\alpha) // (\beta)$ hoặc (α) cắt (β) theo giao tuyến song song với a

Khẳng định (D) đúng

Câu 7:

(A) Khẳng định đúng **(B)** Khẳng định sai

(C) Khẳng định sai **(D)** Khẳng định đúng

Câu 8: Có hai vị trí tương đối

ĐS: (B)

Câu 9: (xem Hình 80)

Ta chứng minh (MON) // (SBC)

MN là đường trung bình của tam giác SAD nên

MN // AD

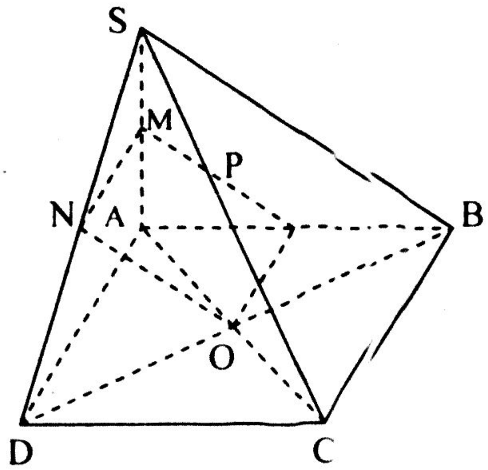
Mà AD // BC, nên MN // BC (1)

Tương tự

NO // SB (2)

(1), (2) và do SB cắt BC nên (MON) // (SBC)

ĐS: (B)



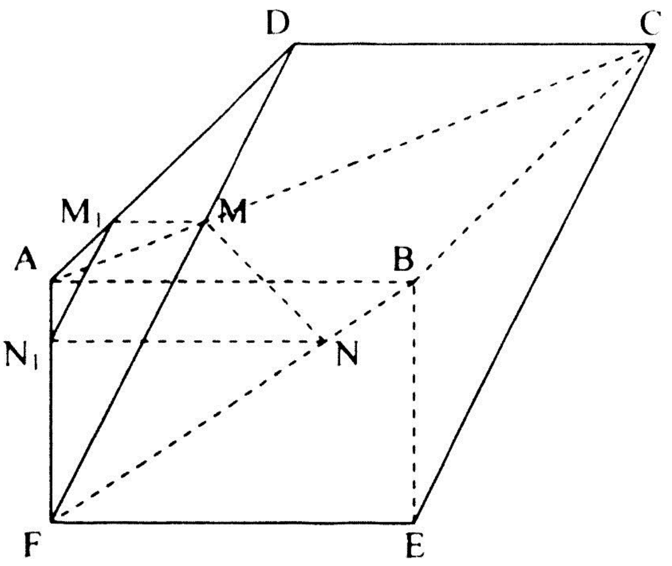
Hình 80

Câu 10: (xem Hình 81)

Các khẳng định ở (A), (C), (D) đều đúng. Khẳng định ở (B) là sai

Thật vậy, vì $MM_1 // NN_1$ nên 4 điểm MM_1NN_1 đồng phẳng (xem hình)) hay nó cách khác (M_1N_1N) trùng với (MNM_1)

ĐS: (B)



Hình 81

Câu 11: (xem Hình 82)

Gọi MN là đoạn giao tuyến của (P) và mặt đáy của hình chóp

Vì (P) // (SBD), (P) ∩ (ABCD) = MN,

(SBD) ∩ (ABCD) = BD

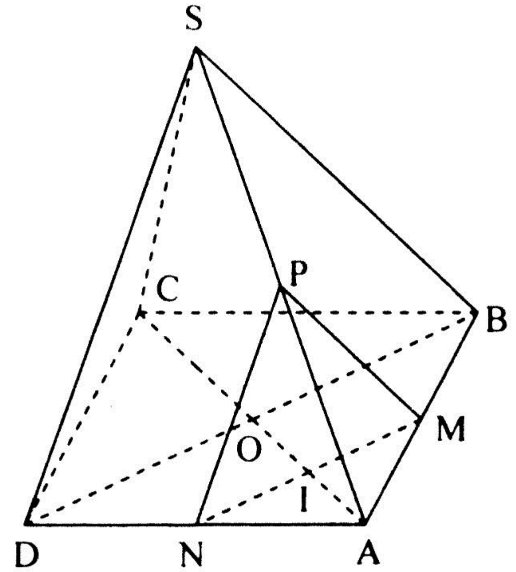
⇒ MN // BD

Lí luận tương tự ta có

(P) cắt mặt (SDA) theo đoạn giao tuyến NP với NP // SD

(P) cắt mặt (SAB) theo đoạn giao tuyến MP với MP // SB

Vậy tam giác MNP đồng dạng với tam giác SBD nên thiết diện là tam giác đều MNP



Hình 82

ĐS: (D)

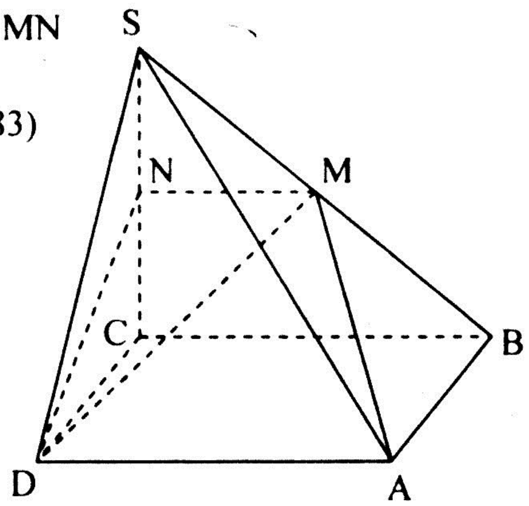
Câu 12:

(ADM) cắt mặt (SBC) theo đoạn giao tuyến MN

Vì AD // BC nên MN // BC

Thiết diện là hình thang AMND (xem hình 83)

ĐS: (B)



Hình 83

Câu 13: (xem Hình 84)

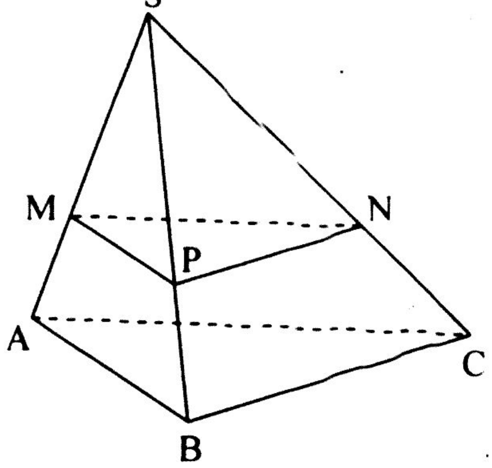
Ta tính S(ABC)

$$S(ABC) = \frac{1}{2}AB.AC.\sin 30^0 = 4$$

(P) cắt hình chóp S.ABC theo thiết diện là tam giác MNP đồng dạng với ABC theo tỉ số đồng dạng $k = \frac{MP}{AB} = \frac{SM}{SA} = \frac{2}{3}$

Vậy $S(MNP) = (\frac{2}{3})^2 S(ABC) = \frac{16}{9}$

ĐS: (A)



Hình 84

Câu 14: Ta cần tính diện tích hình thang cân ABCD (xem Hình 85)

DH, CK vuông góc với AB. Ta có AH = BK

$\Rightarrow AH + BK = 2AH = AB - CD = 2 \Rightarrow AH = 1$

Áp dụng định lí Pitagor vào tam giác vuông ADH ta được:

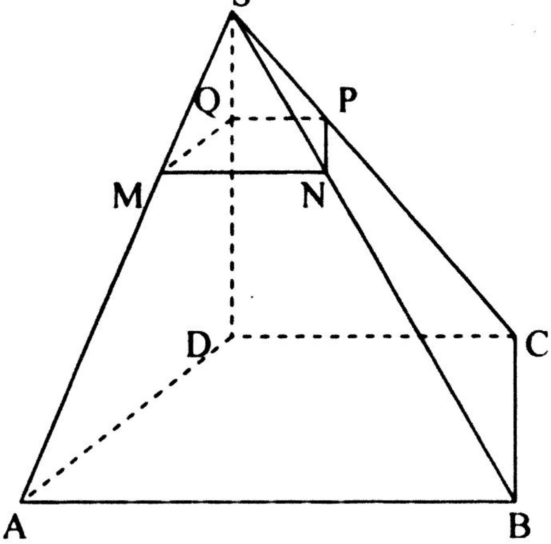
$$DH = \sqrt{AD^2 - AH^2} = \sqrt{3}$$

Vậy: $S(ABCD) = DH.\frac{AB + CD}{2} = 5\sqrt{3}$

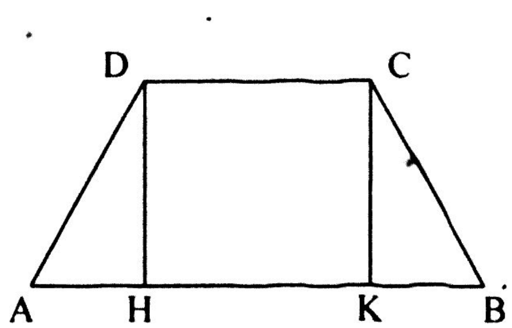
Thiết diện của (P) và hình chóp là tứ giác đồng dạng với ABCD với hệ số đồng dạng bằng $k = \frac{SM}{SA} = \frac{1}{3}$ (xem Hình 86)

Vậy diện tích của thiết diện cần tìm bằng $k^2 S(ABCD) = \frac{5\sqrt{3}}{9}$

ĐS: (A)



Hình 86



Hình 85

Câu 15:

Thiết diện là tứ giác MNPQ (xem Hình 87). Ta dễ dàng chứng minh được (xem câu 9)

$MN \,//\, PQ$ và $MN = \dfrac{CD}{2} = 4;\ PQ = AB = 8$

$NP = \dfrac{SB}{2} = 3;\ QM = \dfrac{SA}{2} = 3$

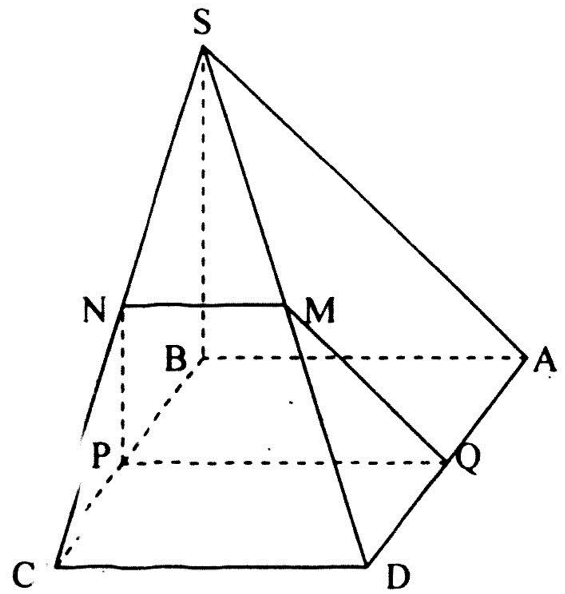
Ta cần tính diện tích hình thang cân MNPQ (xem Hình 88). Hạ NH, MK vuông góc với PQ

Ta có: $PH = KQ \Rightarrow PH = \dfrac{1}{2}(PQ - MN) = 2$

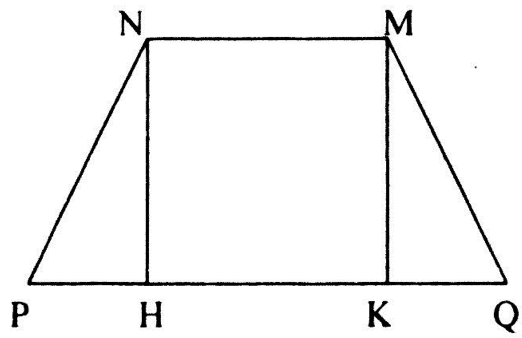
Áp dụng định lí Pitagor cho tam giác vuông PHN ta có: $NH = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$

Vậy $S(MNPQ) = NH.\dfrac{PQ + NM}{2} = 6\sqrt{5}$

ĐS: B)

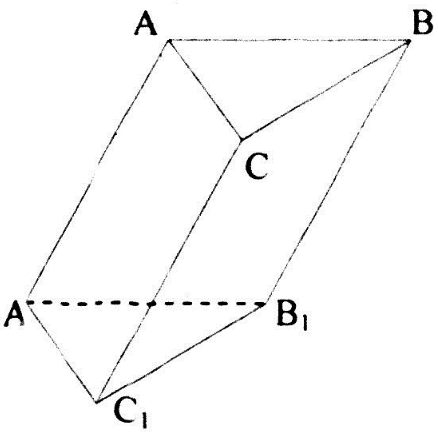


Hình 88

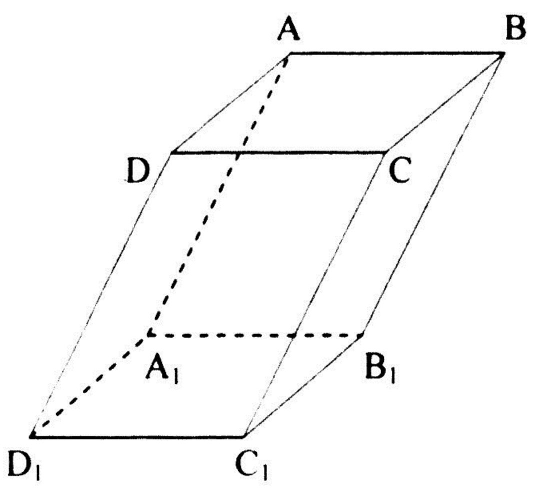


Hình 87

Câu 16 (D) (xem Hình 89)



Hình 89



Hình 90

Câu 17: (D) (xem Hình 90)

Câu 18: (xem Hình 91)

Trong mp(AA_1C_1C), MN cắt CC_1 tại T

Trong mp(CC_1B_1B), B_1T cắt BC tại K

Vậy thiết diện cần tìm là tứ giác B_1MNK

Ta chứng minh B_1MNK không thể là hình thang, cần chứng minh NK không M thể song song với B_1M

Ta có:

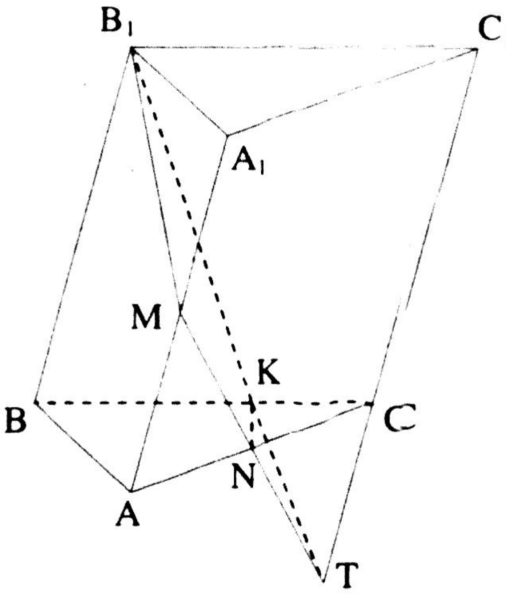
N là trung điểm của AC

Do CT // BB_1 nên $\frac{TK}{KB_1} = \frac{CT}{BB_1} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ K không phải là trung điểm của B_1T

Vậy KN không song song với BB_1

ĐS: (D)



Hình 91

Câu 19: (xem Hình 92)

Rõ ràng phương án (D) không thể xảy ra (bạn đọc tự lí luận)

Ta khảo sát vị trí tương đối của CB_1 và (AHC_1)

Gọi K là trung điểm của AB

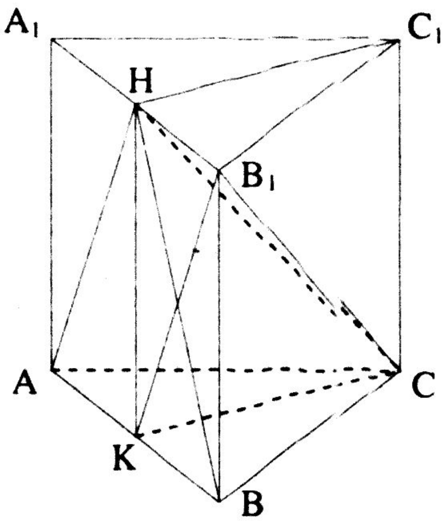
Dễ dàng chứng minh AH // KB_1; C_1H // CK

$\Rightarrow$ (AHC_1) // (CB_1K)

Lại do $CB_1 \subset (CB_1K)$, vì vậy

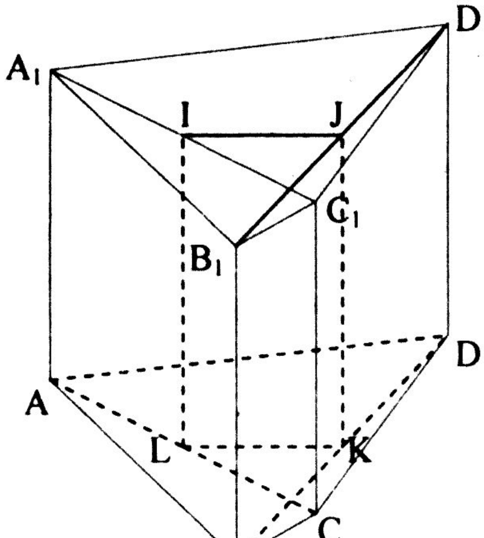
CB_1 // (AHC_1)

ĐS: (A)

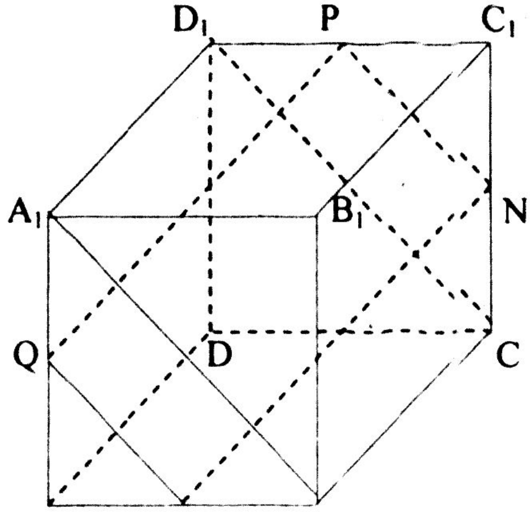


Hình 92

Câu 20: **ĐS: (C)** (xem hình 93)



Hình 93



Hình 94

Câu 21: (xem Hình 94)

Nhận xét rằng ABC_1D_1 là hình bình hành, MP là đường trung bình, vì vậy $MP // BC_1$

Lại do MQ là đường trung bình của tam giác $ABA_1 \Rightarrow MQ // A_1B$

Vậy $(MNPQ) // (A_1BC_1)$

ĐS: (B)

Câu 22: (xem Hình 95)

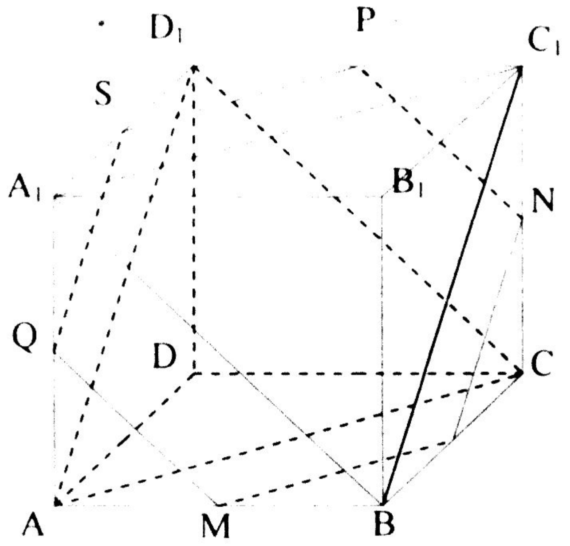
Vì $NP // D_1C$, $D_1C = 2NP$ (đường trung bình) và $D_1C // A_1B$, $D_1C = A_1B$ (tính chất của hình hộp) nên $PN // A_1B$ và $A_1B = 2PN$

Vì vậy gọi $Q = (MNP) \cap AA_1$ thì $MQ // A_1B$ và vì vậy $A_1B = 2MQ$

$\Rightarrow MQ // NP$ và $MQ = NP$. Vậy MNPQ là hình bình hành

Chứng minh tương tự ta có $QS // RN$; $MR // SP$ (xem hình)

Vậy thiết diện cần tìm là lục giác MRNPSQ có sáu cạnh bằng nhau



Hình 95

Ta chứng minh lục giác này là lục giác đều bằng cách chứng minh các góc ở đỉnh bằng nhau và bằng 120^0

Vì A_1BC_1 là tam giác đều nên $\angle BA_1C_1 = 60^0$

Mà $QM // A_1B$ và $MR // A_1C_1$ nên $\angle QMR = 120^0$

Vậy các góc ở đỉnh của lục giác bằng nhau và bằng 120^0

Vậy thiết diện là lục giác đều

ĐS: (C)

Câu 23: (xem Hình 96)

Gọi M, M_1 là trung điểm của AC và A_1C_1

Ta có: $I \in BM$, $G \in C_1M$, $K \in B_1M_1$

Theo tính chất của trọng tâm ta có:

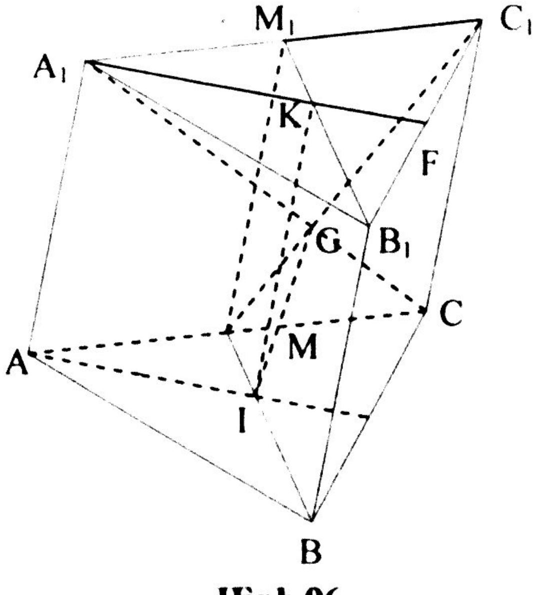
$$\frac{MI}{MB} = \frac{MG}{MC_1} = \frac{1}{3} \Rightarrow IG // BC_1$$

$$\frac{MI}{MB} = \frac{M_1K}{M_1B_1} = \frac{1}{3} \text{ và } MM_1 // BB_1$$

$\Rightarrow IK // BB_1$

Vậy $(IGK) // (BB_1C_1C)$

ĐS: (B)

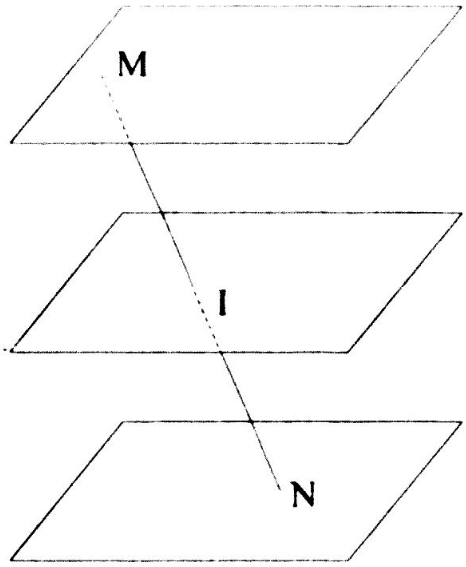


Hình 96

Câu 24:

Tập hợp các điểm I là mặt phẳng song song và cách đều (P) và (Q) (xem hình 97)

ĐS: (B)



Hình 97

Chương III
QUAN HỆ VUÔNG GÓC
§1. VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

TÓM TẮT LÍ THUYẾT

I. Định nghĩa: Vectơ trong không gian là một đoạn thẳng có hướng. Kí hiệu $\overrightarrow{AB}$ chỉ vectơ có điểm đầu A điểm cuối B. Vectơ còn được kí hiệu $\vec{a}$, $\vec{x}$ ...

Các khái niệm có liên quan đến giá, độ dài, sự cùng phương, cùng hướng, sự bằng nhau ... được định nghĩa tương tự như trong mặt phẳng

2. Phép cộng và phép trừ vectơ trong không gian được định nghĩa tương tự như trong mặt phẳng

Các qui tắc 3 điểm của phép cộng và phép trừ được sử dụng tương tự như trong mặt phẳng

Qui tắc hình hộp: Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' có 3 cạnh xuất phát từ đỉnh A là AA', AB, AD ta có

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$$

3. Phép nhân vectơ với một số được định nghĩa tương tự như trong mặt phẳng

II. Điều kiện đồng phẳng của ba vectơ

1. Định nghĩa: Trong không gian ba vectơ được gọi là đồng phẳng nếu giá của chúng song song với một mặt phẳng

2. Định lí 1: Trong không gian cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ không cùng phương và vectơ $\vec{c}$. Khi đó ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng khi và chỉ khi cặp số m, n sao cho $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$. Ngoài ra cặp số m, n là duy nhất

Định lí 2: Trong không gian cho ba vectơ không đồng phẳng $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Khi đó với mọi vectơ $\vec{x}$ ta đều có được bộ ba số m, n, p sao cho $\vec{x} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$. Ngoài ra bộ ba số m, n, p là duy nhất

CÁC DẠNG TOÁN CƠ BẢN

I. Dạng toán 1: Chứng minh các đẳng thức vectơ

Phương pháp: Sử dụng qui tắc 3 điểm, qui tắc hình hộp, các phép toán về vectơ, tính chất của trọng tâm, của vectơ $\vec{0}$ ... chứng minh vế này bằng vế kia, hoặc biến đổi tương đương đẳng thức cần chứng minh về đẳng thức mà ta biết là đúng. Chú ý một số kết quả:

- Nếu M là trung điểm của AB ta có $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OM}$
- G là trọng tâm của tam giác ABC $\Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

VD1: Cho tứ diện ABCD. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$. Gọi G là trọng tâm của tam giác BCD. Chứng minh $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\vec{b} + \vec{c} + \vec{d})$

Giải

G là trọng tâm tam giác BCD ta có

$$\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{DG} = \vec{0} \Leftrightarrow (\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AD}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AG} - (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG}$$

VD2: Trong mặt phẳng cho tứ giác ABCD có hai đường chéo cắt nhau tại O. Chứng minh mệnh đề sau:

Nếu $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OD} = \vec{0}$ thì ABCD là hình thang

Giải

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OD} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OC} = -(\overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OD})\ (*)$$

Vì $\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OC}$ có giá song song với AC và $-(\overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OD})$ có giá song song với BD. Lại do AC và BD cắt nhau, vậy

$$(*) \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OD} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = 2(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC})$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{CD} \Rightarrow \text{ABCD là hình thang}$$

II. Dạng toán 2: Chứng minh ba vectơ đồng phẳng

Phương pháp: Để chứng minh ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng có thể sử dụng các cách sau

- Dựa vào định nghĩa: chứng minh $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ có giá song song với một mặt phẳng
- Chứng minh tồn tại duy nhất hai số thực m, n thoả mãn: $\vec{a} = m\vec{b} + n\vec{c}$ ($\vec{b}, \vec{c}$ không cùng phương)

VD1: Cho hình hộp ABCD. EFGH. Gọi I là tâm hình bình hành ABFE và K là tâm của hình bình hành BCGF. Chứng minh $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{IK}$, $\overrightarrow{GF}$ đồng phẳng

Giải

Ta chứng minh $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{IK}$, $\overrightarrow{GF}$ đồng phẳng bằng hai cách

Cách 1: Phương pháp tổng hợp (xem hình 98)

Ta chứng minh các đường thẳng BD, IK, GF song song hoặc chứa trong (ABCD)

Ta có: BD $\subset$ (ABCD) (1)

GF // BC $\Rightarrow$ GF // (ABCD) (2)

Mặt khác

IK // AC (tính chất đường trung bình)

$\Rightarrow$ IK // (ABCD) (3)

(1), (2), (3) $\Rightarrow \overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{IK}$, $\overrightarrow{GF}$ đồng phẳng

Cách 2: Phương pháp vectơ:

Biểu diễn $\vec{BD}$, $\vec{IK}$, $\vec{GF}$ theo 3 vectơ không đồng phẳng $\vec{AD}$, $\vec{AB}$, $\vec{AE}$

Ta có:

$\vec{BD} = \vec{AD} - \vec{AB}$;

$\vec{GF} = -\vec{AD}$

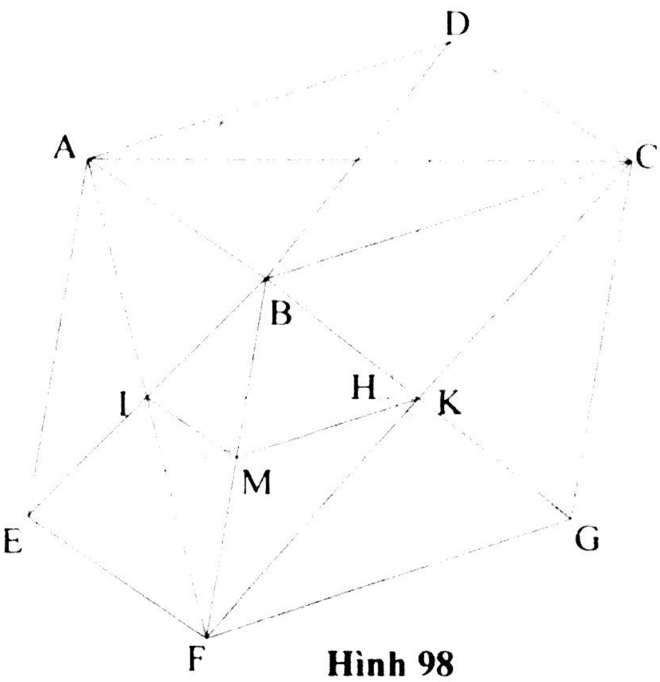
Gọi M là trung điểm của BF ta có

$\vec{IK} = \vec{IM} + \vec{MK}$

$= 0,5(\vec{AB} + \vec{AD})$

$\Rightarrow \vec{BD} + 2\vec{GF} + 2\vec{IK} = \vec{0}$

Vậy $\vec{BD}$, $\vec{IK}$, $\vec{GF}$ đồng phẳng



Hình 98

VD2: Cho ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ không đồng phẳng. Xét các vectơ $\vec{x} = 2\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{y} = \vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$, $\vec{z} = -3\vec{b} - 2\vec{c}$. Chứng minh $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ đồng phẳng

Giải

Để xét sự đồng phẳng của 3 vectơ $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ ta xét phương trình:

$m\vec{x} + n\vec{y} + p\vec{z} = \vec{0}$ ẩn m, n, p

- Nếu phương trình có nghiệm m, n, p không đồng thời bằng 0 thì $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ đồng phẳng

- Nếu phương trình có duy nhất nghiệm m = n = p = 0 thì $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ không đồng phẳng

Xét phương trình

$$m\vec{x} + n\vec{y} + p\vec{z} = \vec{0} \Leftrightarrow m(2\vec{a} + \vec{b}) + n(\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}) + p(-3\vec{b} - 2\vec{c}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow (2m + n)\vec{a} + (m - n - 3p)\vec{b} - (n + 2p)\vec{c} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m + n = 0 \\ m - n - 3p = 0 \\ n + 2p = 0 \end{cases}$$

Hệ trên có vô số nghiệm

Vậy $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ đồng phẳng

VD3: Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J là hai điểm di động lần lượt trên hai cạnh AD, BC sao cho $\frac{IA}{ID} = \frac{JB}{JC} = k > 0$. Chứng minh IJ luôn song song với một mặt phẳng cố định

Giải

Theo giả thiết ta có (xem Hình 99)

$\overrightarrow{JB} = -k\overrightarrow{JC}$ và $\overrightarrow{IA} = -k\overrightarrow{ID}$

$\overrightarrow{JB} = -k\overrightarrow{JC}$

$\Rightarrow \overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IJ} = -k(\overrightarrow{IC} - \overrightarrow{IJ})$

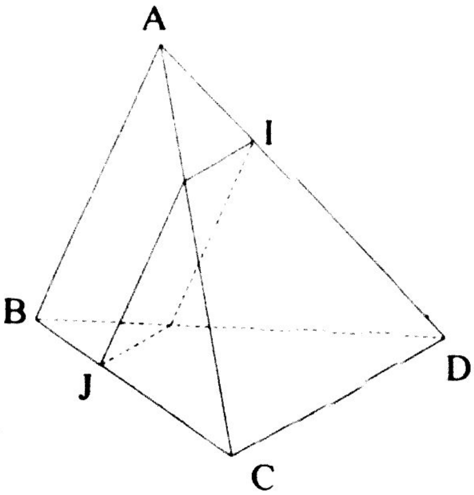
$\Rightarrow (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB}) - \overrightarrow{IJ} = -k[(\overrightarrow{ID} + \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{IJ}]$

$\Rightarrow (k+1)\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{DC} + (\overrightarrow{IA} + k\overrightarrow{ID})$

$= \overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{DC}$ (do $\overrightarrow{IA} + k\overrightarrow{ID} = \vec{0}$)

$\Rightarrow \overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}$ đồng phẳng

Gọi (P) là mặt phẳng qua AB và song song với CD, thì (P) cố định và IJ // (P)



Hình 99

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

(A) Nếu trong ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ có một vectơ $\vec{0}$ thì ba vectơ đó đồng phẳng

(B) Nếu trong ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ có hai vectơ cùng phương thì ba vectơ đó đồng phẳng

(C) Nếu giá của ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ cùng song song với một mặt phẳng thì ba vectơ đó đồng phẳng

(D) Nếu giá của ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ cắt nhau từng đôi thì ba vectơ đó đồng phẳng

Câu 2: Cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Điều kiện nào sau đây khẳng định $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng?

(A) Tồn tại ba số thực m, n, p sao cho $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$

(B) Tồn tại ba số thực m, n, p thoả mãn $m + n + p \neq 0$ và $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$

(C) Tồn tại ba số thực m, n, p thoả mãn $m + n + p = 0$ và $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$

(D) Giá của $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng qui

Câu 3: Cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

(A) Nếu có $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$, trong đó $m^2 + n^2 + p^2 > 0$ thì $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng

(B) Nếu $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng thì từ $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$ ta suy ra $m = n = p = 0$

(C) Với ba số thực m, n, p thoả mãn $m + n + p \neq 0$ ta có $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$ thì $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng

(D) Nếu gía của $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng qui thì $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng

Câu 4: Cho ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ không đồng phẳng. Xét các vectơ $\vec{x} = 2\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{y} = \vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$, $\vec{z} = -3\vec{b} - 2\vec{c}$

Chọn khẳng định đúng

(A) Hai vectơ $\vec{x}$, $\vec{y}$ cùng phương

(B) Hai vectơ $\vec{y}$, $\vec{z}$ cùng phương

(C) Hai vectơ $\vec{x}$, $\vec{z}$ cùng phương

(D) Các khẳng định ở (A), (B), (C) đều sai

Câu 5: Cho ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ không đồng phẳng. Xét các vectơ $\vec{x} = 2\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{y} = \vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$, $\vec{z} = -3\vec{b} - 2\vec{c}$

Chọn khẳng định đúng

(A) Ba vectơ $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ không đồng phẳng

(B) Hai vectơ $\vec{x}$, $\vec{b}$ cùng phương

(C) Hai vectơ $\vec{x}$, $\vec{a}$ cùng phương

(D) Các khẳng định ở (A), (B), (C) đều sai

Câu 6: Cho hình hộp ABCD. $A_1B_1C_1D_1$. Gọi M là trung điểm AD. Chọn đẳng thức đúng

(A) $\overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{B_1C_1} = 2\overrightarrow{B_1D}$

(B) $\overrightarrow{B_1M} = \overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{B_1C_1}$

(C) $\overrightarrow{C_1M} = \overrightarrow{C_1C} + \overrightarrow{C_1D_1} + 0{,}5\overrightarrow{C_1B_1}$

(D) $\overrightarrow{C_1M} = \overrightarrow{C_1C} + 0{,}5\overrightarrow{C_1D_1} + 0{,}5\overrightarrow{C_1B_1}$

Câu 7: Cho tứ diện ABCD. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$. Gọi M là trung điểm của BC. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào đúng?

(A) $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c} - 2\vec{b})$ **(B)** $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c} - 2\vec{a})$

(C) $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c})$ **(D)** $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c})$

Câu 8: Cho tứ diện ABCD. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$. Gọi G là trọng tâm của tam giác BCD. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào đúng?

(A) $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}(\vec{b} + \vec{c} + \vec{d})$ **(B)** $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\vec{b} + \vec{c} + \vec{d})$

(C) $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c} + \vec{d})$ **(D)** $\overrightarrow{AG} = \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$

Câu 9: Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Gọi O là tâm của hình lập phương. Chọn đẳng thức đúng

(A) $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1})$ **(B)** $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1})$

(C) $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1})$ **(D)** $\overrightarrow{AO} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1})$

Câu 10: Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Tìm đẳng thức sai

(A) $\overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{CA_1} + 2\overrightarrow{C_1C} = \vec{0}$ **(B)** $\overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{A_1C} = 2\overrightarrow{AC}$.

(C) $\overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{A_1C} = \overrightarrow{AA_1}$ **(D)** $\overrightarrow{CA_1} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CC_1}$

Câu 11: Cho tứ diện ABCD. Gọi P, Q là trung điểm AB và CD. Chọn đẳng thức đúng?

(A) $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD})$ **(B)** $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AD})$

(C) $\overrightarrow{PQ} = (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD})$ **(D)** $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD})$

Câu 12: Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

(A) $\overrightarrow{BA_1}, \overrightarrow{BD_1}, \overrightarrow{BC_1}$ đồng phẳng **(B)** $\overrightarrow{BA_1}, \overrightarrow{BD_1}, \overrightarrow{BD}$ đồng phẳng

(C) $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BD_1}, \overrightarrow{BC_1}$ đồng phẳng **(D)** $\overrightarrow{BA_1}, \overrightarrow{BD_1}, \overrightarrow{BC}$ đồng phẳng

Câu 13: Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

(A) $\overrightarrow{CD_1}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{A_1C}$ đồng phẳng **(B)** $\overrightarrow{CD_1}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{A_1B_1}$ đồng phẳng

(C) $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BD_1}, \overrightarrow{BC_1}$ đồng phẳng **(D)** $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{C_1A}$ đồng phẳng

Câu 14: Cho hai điểm phân biệt A, B và một điểm O bất kì. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

(A) Điểm M thuộc đường thẳng AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} = k\overrightarrow{BA}$

(B) Điểm M thuộc đường thẳng AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} = k(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$

(C) Điểm M thuộc đường thẳng AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{OM} = k\overrightarrow{OA} + (1-k)\overrightarrow{OB}$

(D) Điểm M thuộc đường thẳng AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$

Câu 15: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A_1B_1C_1$. Đặt $\overrightarrow{AA_1} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$. $\overrightarrow{BC} = \vec{d}$. Trong các đẳng thức sau đẳng thức nào đúng?

(A) $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$ **(B)** $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$

(C) $\vec{b} - \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$ **(D)** $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{d}$

Câu 16: Trong mặt phẳng cho tứ giác ABCD có hai đường chéo cắt nhau tại O. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

(A) Nếu ABCD là hình bình hành thì $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$

(B) Nếu $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$ thì ABCD là hình bình hành

(C) Nếu $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OD} = \vec{0}$ thì ABCD là hình thang

(D) Nếu ABCD là hình thang thì $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OD} = \vec{0}$

Câu 17: Cho hình chóp S.ABCD. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

(A) Nếu ABCD là hình bình hành thì $\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC}$

(B) Nếu $\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC}$ thì ABCD là hình bình hành

(C) Nếu $\overrightarrow{SB} + 2\overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SA} + 2\overrightarrow{SC}$ thì ABCD là hình thang

(D) Nếu ABCD là hình thang thì $\overrightarrow{SB} + 2\overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SA} + 2\overrightarrow{SC}$

Câu 18 Cho hình chóp S.ABCD. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

(A) Nếu ABCD là hình bình hành thì $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 4\overrightarrow{SO}$

(B) Nếu $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 4\overrightarrow{SO}$ thì ABCD là hình bình hành

(C) Nếu $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + 2\overrightarrow{SC} + 2\overrightarrow{SD} = 6\overrightarrow{SO}$ thì ABCD là hình thang

(D) Nếu ABCD là hình thang thì $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + 2\overrightarrow{SC} + 2\overrightarrow{SD} = 6\overrightarrow{SO}$

Câu 19 Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Chọn đẳng thức sai?

(A) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{BD_1}$ **(B)** $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{B_1A_1}$

(C) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{D_1C_1} + \overrightarrow{D_1A_1} = \overrightarrow{DC}$ **(D)** $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{BD_1} = \overrightarrow{BC}$

Câu 20 Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ với tâm O. Hãy chỉ ra đẳng thức sai?

(A) $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}$ **(B)** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC_1} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{D_1A} = \vec{0}$

(C) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD_1}$ **(D)** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{AD_1} + \overrightarrow{D_1O} + \overrightarrow{OC_1}$

Câu 21 Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD và G là trung điểm của MN. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào sai?

(A) $\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} = \vec{0}$ **(B)** $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

(C) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG}$ **(D)** $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GD}$

Câu 22 Cho tứ diện ABCD và điểm G thoả mãn $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$ (G là trọng tâm của tứ diện). Gọi G_0 là giao điểm GA và mp(BCD). Chọn khẳng định đúng?

(A) $\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{G_0G}$ **(B)** $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{G_0G}$

(C) $\overrightarrow{GA} = 3\overrightarrow{G_0G}$ **(D)** $\overrightarrow{GA} = 4\overrightarrow{G_0G}$

Câu 23: Cho hình chóp S.ABCD đáy ABCD là hình bình hành có tâm O. Gọi G là điểm thoả mãn: $\overrightarrow{GS} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$. Chọn khẳng định đúng

(A) G, S, O không thẳng hàng (B) $\overrightarrow{GS} = 3\overrightarrow{OG}$

(C) $\overrightarrow{GS} = 4\overrightarrow{OG}$ (D) $\overrightarrow{GS} = 5\overrightarrow{OG}$

Câu 24: Cho hình tứ diện SABC và I là trọng tâm của tam giác ABC. Chọn đẳng thức đúng

(A) $\overrightarrow{SI} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}$ (B) $\overrightarrow{SI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{SB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{SC}$

(C) $3(\overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}) = \overrightarrow{SI}$ (D) $6\overrightarrow{SI} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}$

Câu 25: Cho 3 vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ không đồng phẳng. Trong các khẳng định sau khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai?

(A) Các vectơ $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, $\vec{y} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$, $\vec{z} = -\vec{a} + 3\vec{b} + 3\vec{c}$ đồng phẳng

□ đúng, □ sai

(B) Các vectơ $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c}$, $\vec{y} = 2\vec{a} - 3\vec{b} - 6\vec{c}$, $\vec{z} = -\vec{a} + 3\vec{b} + 6\vec{c}$ không đồng phẳng

□ đúng, □ sai

Câu 26: Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Chọn khẳng định sai

(A) Các vectơ $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng

(B) Các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng

(C) Các vectơ $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng

(D) Các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{MN}$ không đồng phẳng

Câu 27: Cho tứ diện ABCD trên cạnh AD và BC lần lượt lấy M, N sao cho AM = 3MD, BN = 3NC. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AD và BC. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

(A) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{PQ}$ đồng phẳng (B) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng

(C) $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{MN}$ không đồng phẳng (D) $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{DC}$ đồng phẳng

Câu 28: Cho hình hộp ABCD. EFGH. Gọi I là tâm hình bình hành ABEF và K là tâm của hình bình hành BCGF. Chọn khẳng định đúng?

(A) $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{IK}$, $\overrightarrow{GF}$ đồng phẳng (B) $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{EK}$, $\overrightarrow{GF}$ đồng phẳng

(C) $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{GF}$ đồng phẳng (D) Các khẳng định ở (A), (B), (C) đều sai

Câu 29: Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. M là điểm trên đoạn AC sao cho AC = 3MC. Lấy N trên đoạn C'D sao cho xC'D = C'N. Với giá trị nào của x thì MN // BD'

(A) $x = \frac{2}{3}$ (B) $x = \frac{1}{3}$ (C) $x = \frac{1}{2}$ (D) $x = \frac{1}{4}$

Câu 30: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Trên các đường chéo BD và AD' của các mặt bên lần lượt lấy hai điểm M, N sao cho DM = AN. MN song song với mặt phẳng nào sau đây?

(A) (A'D'BC) **(B)** (BB'C) **(C)** (AA'B) **(D)** (ADB')

TRẢ LỜI

Câu 1: (D)

Câu 2: (B)

Câu 3: (D)

Câu 4: Để xét sự cùng phương của hai vectơ $\vec{x}$, $\vec{y}$ ta xét phương trình:

$$m\vec{x} + n\vec{y} = \vec{0} \quad \text{ẩn } m, n$$

- Nếu phương trình có nghiệm m, n không đồng thời bằng 0 thì $\vec{x}$, $\vec{y}$ cùng phương
- Nếu phương trình có duy nhất nghiệm m = n = 0 thì $\vec{x}$, $\vec{y}$ không cùng phương

(A) Xét phương trình

$$m\vec{x} + n\vec{y} = \vec{0} \Leftrightarrow m(2\vec{a} + \vec{b}) + n(\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow (2m + n)\vec{a} + (m - n)\vec{b} - n\vec{c} = \vec{0} \ (*)$$

Vì $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ không đồng phẳng, nên

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 2m + n = 0 \\ m - n = 0 \\ n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = n = 0$$

Vậy $\vec{x}$, $\vec{y}$ không cùng phương

(B) Xét phương trình

$$m\vec{y} + n\vec{z} = \vec{0} \Leftrightarrow m(\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}) + n(-3\vec{b} - 2\vec{c}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow m\vec{a} - (m + 3n)\vec{b} - (m + 2n)\vec{c} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m + 3n = 0 \\ m + 2n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = n = 0$$

Vậy $\vec{y}$, $\vec{z}$ không cùng phương,

Chứng minh tương tự $\vec{x}$, $\vec{z}$ không cùng phương

ĐS: D)

Câu 5:

Xét phương trình

$$m\vec{x} + n\vec{y} + p\vec{z} = \vec{0} \Leftrightarrow m(2\vec{a} + \vec{b}) + n(\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}) + p(-3\vec{b} - 2\vec{c}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow (2m + n)\vec{a} + (m - n - 3p)\vec{b} - (n + 2p)\vec{c} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m + n = 0 \\ m - n - 3p = 0 \\ n + 2p = 0 \end{cases}$$

Hệ trên có vô số nghiệm m, n, p

Vậy $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ không đồng phẳng

Giải tương tự như câu 4

Xét phương trình:

$$m\vec{x} + n\vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow m(2\vec{a} + \vec{b}) + n\vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow 2m\vec{a} + (m + n)\vec{b} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m = 0 \\ m + n = 0 \end{cases} \text{(do } \vec{a}, \vec{b} \text{ không cùng phương)}$$

$$\Leftrightarrow m = n = 0$$

Vậy $\vec{x}$, $\vec{b}$ không cùng phương.

Khẳng định (B) sai

Chứng minh tương tự, khẳng định (C) sai

ĐS: (D)

Câu 6: (xem Hình 100)

Theo qui tắc hình hộp ta có:

$$\overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{B_1D}$$

Vì vậy các đẳng thức ở (A), (B) sai

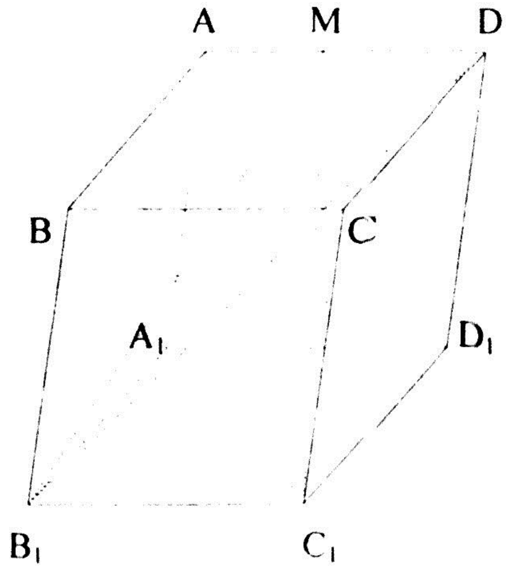
Ta chứng minh đẳng thức ở (C) là đúng

$$\overrightarrow{C_1M} = \overrightarrow{C_1C} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DM}$$

$$= \overrightarrow{C_1C} + \overrightarrow{C_1D_1} + 0{,}5\overrightarrow{C_1B_1}$$

(do $\overrightarrow{C_1D_1} = \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DM} = 0{,}5\overrightarrow{C_1B_1}$)

ĐS: (C)



Hình 100

Câu 7:

$$\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AM} = -\vec{c} + \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c})$$

ĐS: (C)

Câu 8:

G là trọng tâm tam giác BCD ta có

$$\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{DG} = \vec{0} \Leftrightarrow (\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AD}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AG} - (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG}$$

ĐS: (B

Câu 9:

$$\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1})$$

ĐS: (C)

Câu 10: Gọi O là tâm của hình hộp (xem Hình 101)

Ta có: $\overrightarrow{AC_1} = 2\overrightarrow{AO} = 2\overrightarrow{OC_1}$; $\overrightarrow{CA_1} = 2\overrightarrow{CO}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{CA_1} = 2(\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OC_1}) = 2\overrightarrow{CC_1}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{CA_1} + 2\overrightarrow{C_1C} = 2\overrightarrow{CC_1} + 2\overrightarrow{C_1C} = \vec{0}$

Khẳng định (A) đúng

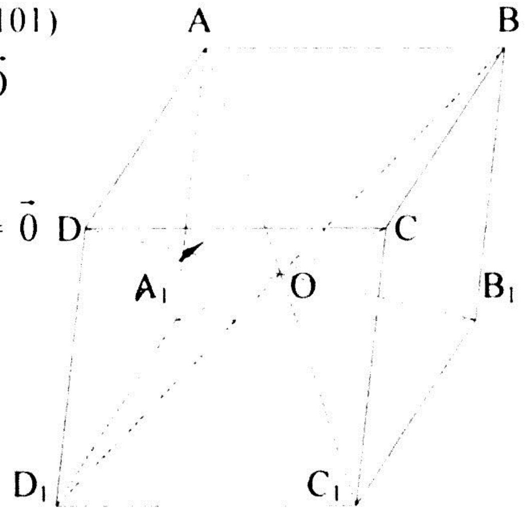
$\overrightarrow{AC_1} = 2\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{A_1C} = 2\overrightarrow{OC}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{A_1C} = 2(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}) = 2\overrightarrow{AC}$

Khẳng định (B) đúng

Ta chứng minh khẳng định (D) đúng

$\overrightarrow{CA_1} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CA_1} + \overrightarrow{A_1C_1} = \overrightarrow{CC_1}$



Hình 101

ĐS: (C)

Câu 11: (xem Hình 102)

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CQ}$ (1)

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DQ}$ (2)

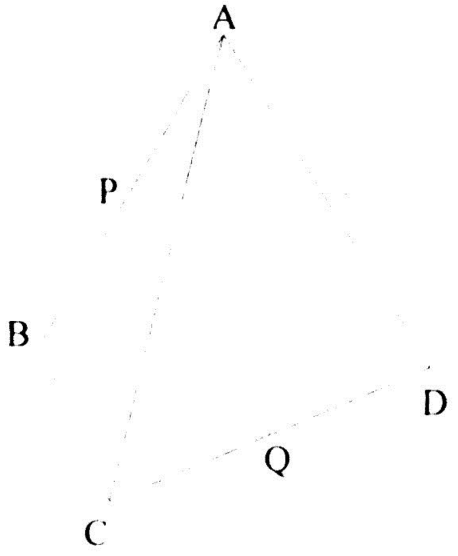
(1) cộng (2) vế theo vế ta có:

$2\overrightarrow{PQ} = (\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PA}) + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} + (\overrightarrow{CQ} + \overrightarrow{DQ})$

$= \vec{0} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} + \vec{0}$

$= \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}$

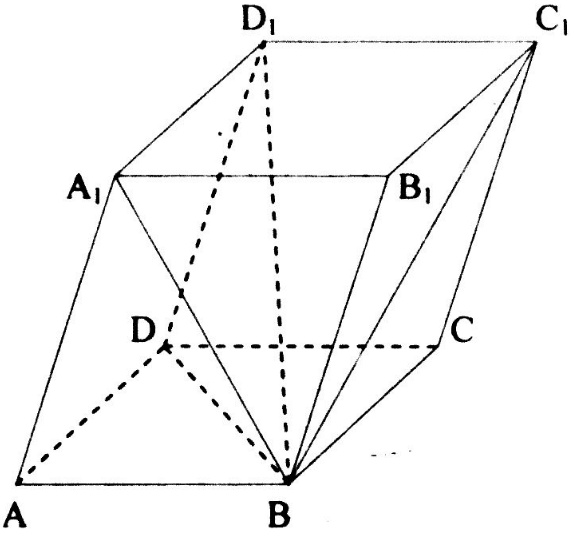
$\Rightarrow \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD})$



Hình 102

ĐS: (A)

Câu 12: (D) (xem Hình 103)



Hình 103

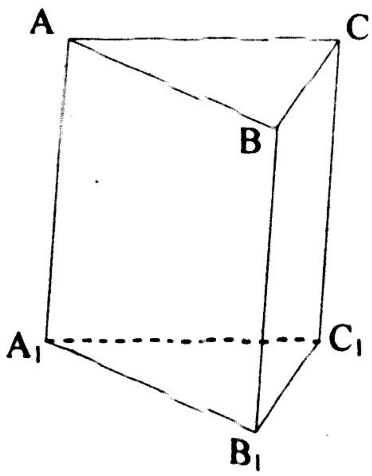
Câu 13: (A)

Câu 14: (C)

Kết quả câu c rất quan trọng trong việc chứng minh 3 điểm thẳng hàng, tính toán các tỉ số

Câu 15: (xem Hình 104)

(A) Biểu thức sai. $\vec{b} + \vec{c}$ là vectơ có giá song song với (ABC) còn $\vec{a}$ là vectơ có giá cắt (ABC), vì thế $\vec{a}$ không thể bằng $\vec{b} + \vec{c}$



Hình 104

(B) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA_1}$

$= 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA_1}$

Rõ ràng $2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA_1}$ không thể bằng $\vec{0}$ vì $2\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AA_1}$ là hai vectơ khác phương

Đẳng thức sai

(C) $\vec{b} - \vec{c} + \vec{d} = \overrightarrow{AB} - (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} = \vec{0}$

ĐS: (C)

Câu 16:

• $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = -(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD})$ ((*)

Vì $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$ có giá song song với AC và $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$ có giá song song với BD. Lại do AC và BD cắt nhau, vậy

(*) $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \vec{0} \Leftrightarrow$ O là trung điểm của AC và BD

$\Leftrightarrow$ ABCD là hình bình hành

Khẳng định (A), (B) là đúng

• $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OD} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OC} = -(\overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OD})$ (*)

Lí luận như phần trên (*) tương đương với

$$\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OD} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = 2(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC})$$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{CD} \Rightarrow$ ABCD là hình thang

Khẳng định ở (D) không đúng, chẳng hạn lấy hình thang cân có đáy AB = 5CD

ĐS: (D)

Câu 17: (xem Hình 105)

$$\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC}$$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SB} = \overrightarrow{SD} - \overrightarrow{SC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$

$\Leftrightarrow$ ABCD là hình bình hành

Khẳng định ở (A), (B) đúng

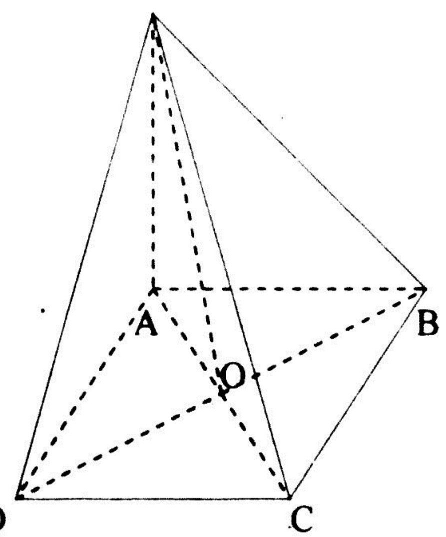
$$\overrightarrow{SB} + 2\overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SA} + 2\overrightarrow{SC}$$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SB} = 2(\overrightarrow{SD} - \overrightarrow{SC}) \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{CD}$

$\Rightarrow$ ABCD là hình thang. Khẳng định ở (C) đúng

Rõ ràng khẳng định ở (D) là sai. Ví dụ lấy hình thang ABCD có đáy lớn AB = 5CD

ĐS: (D)



Hình 105

Câu 18:

$$\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 4\overrightarrow{SO}$$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SO}) + (\overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SO}) + (\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SO}) + (\overrightarrow{SD} - \overrightarrow{SO}) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow$ ABCD là hình bình hành

Khẳng định (A), (B) đúng

$$\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + 2\overrightarrow{SC} + 2\overrightarrow{SD} = 6\overrightarrow{SO}$$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SO}) + (\overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SO}) + 2(\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SO}) + 2(\overrightarrow{SD} - \overrightarrow{SO}) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OD} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OD} = \vec{0}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = 2(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}) \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{CD}$

Vậy ABCD là hình thang. Khẳng định (C) đúng

ĐS: (D)

Câu 19:

Khẳng định (A) là đúng (qui tắc hình hộp)

Khẳng định (B) là đúng vì $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B_1C_1}$ và $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{B_1A_1}$

Khẳng định (C) là đúng vì

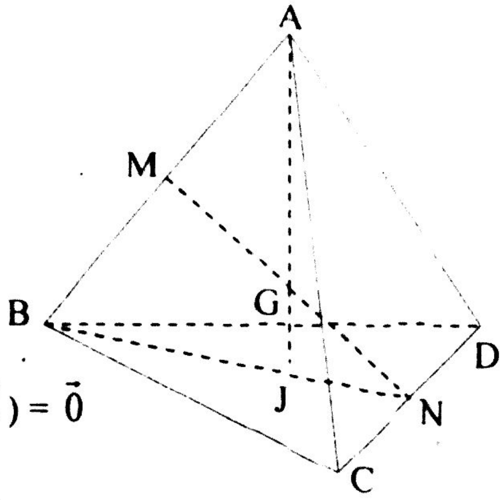
$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{D_1C_1} + \overrightarrow{D_1A_1} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA} \text{ (vì } \overrightarrow{D_1C_1} = \overrightarrow{DC};\ \overrightarrow{D_1A_1} = \overrightarrow{DA}\text{)}$$

$$= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DC}$$

ĐS: (D)

Câu 20: (C)

Câu 21: (xem Hình 106)



Hình 106

(A) Đẳng thức đúng

(B) Vì $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = 2\overrightarrow{GM}$;

$\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 2\overrightarrow{GN}$

$\Rightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 2(\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN}) = \vec{0}$

Đẳng thức đúng

(C) Từ biểu thức (B), sử dụng qui tắc ba điểm ta có đẳng thức đúng ở câu (C)

$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MG}) + (\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MG}) + (\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MG}) + (\overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MG}) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG}$

ĐS: (D)

Chú ý: Điểm G được gọi là trọng tâm của tứ diện ABCD

Câu 22: (xem Hình 106)

Gọi J là trọng tâm của tam giác BCD ta có

$\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 3\overrightarrow{GJ}$, vì vậy

$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GJ} = \vec{0}$ (*)

(*) $\Rightarrow$ G, A, J thẳng hàng $\Rightarrow J \equiv G_0$

Vậy $\overrightarrow{GA} = 3\overrightarrow{G_0G}$

ĐS: (C)

Câu 23: ABCD là hình bình hành ta có

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$. Vì vậy

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OG}) + (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OG})$$

$$+ (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OG}) + (\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OG})$$

$$= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} - 4\overrightarrow{OG} = -4\overrightarrow{OG}$$

Do đó: $\overrightarrow{GS} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GS} - 4\overrightarrow{OG} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GS} = 4\overrightarrow{OG}$

ĐS: (C)

Câu 24:

Vì I là trọng tâm của tam giác ABC nên $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SI}) + (\overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SI}) + (\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SI}) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} - 3\overrightarrow{SI} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{SI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{SB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{SC}$

ĐS: (B)

Câu 25 Để chứng minh ba vectơ $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ đồng phẳng ta chứng minh phương trình $m\vec{x} + n\vec{y} + p\vec{z} = \vec{0}$ có nghiệm m, n, p không đồng thời bằng 0

(A) Ta có:

$m\vec{x} + n\vec{y} + p\vec{z} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow m(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) + n(2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}) + p(-\vec{a} + 3\vec{b} + 3\vec{c}) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow (n + 2n - p)\vec{a} + (m - 3n + 3p)\vec{b} + (m + n + 3p)\vec{c} = \vec{0}$ (*)

Vì $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ không đồng phẳng nên

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} m + 2n - p = 0 \\ m - 3n + 3p = 0 \\ m + n + 3p = 0 \end{cases}$$

Bấm MTBT, hệ có nghiệm duy nhất m = n = p = 0

Vậy 3 vectơ trên không đồng phẳng

Khẳng định (A) sai

(B) Chứng minh tương tự như (A)

$m\vec{x} + n\vec{y} + p\vec{z} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow m(\vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c}) + n(2\vec{a} - 3\vec{b} - 6\vec{c}) + p(-\vec{a} + 3\vec{b} + 6\vec{c}) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow (n + 2n - p)\vec{a} + (m - 3n + 3p)\vec{b} + (2m - 6n + 6p)\vec{c} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n + 2n - p = 0 \\ n - 3n + 3p = 0 \\ 2m - 6n + 6p = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + 2n - p = 0 \\ m - 3n + 3p = 0 \end{cases} (*)$$

Chú ý rằng phương trình m − 3n + 3p = 0 tương đương với phương trình 2m − 6n + 6p = 0

...ng (*) có vô số nghiệm khác 0

Vậy ba vectơ đã cho đồng phẳng

Khẳng định (B) sai

Câu 26: Khẳng định (C) rõ ràng là sai.

ĐS: C) .

Xin nêu ra hai cách chứng minh các khẳng định đúng ở (A), (B)

Cách 1: Phương pháp tổng hợp (xem Hình 107)

Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AC và BD.

Dễ dàng chứng minh được NPMQ là hình bình hành có AB // NP, CD // NQ vì vậy AB và CD song song với mp(NPMQ) chứa MN vậy $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng

Chứng minh tương tự ta có các vectơ $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng

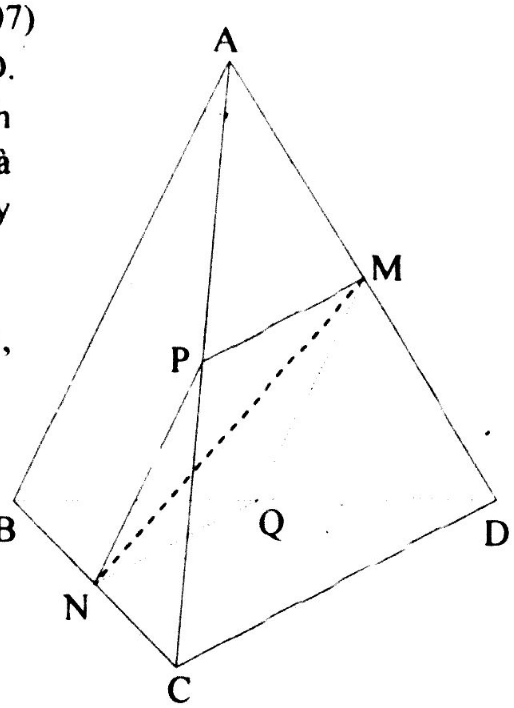
Cách 2: Phương pháp vectơ

Biểu diễn $\overrightarrow{MN}$ theo các vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DC}$

Ta có:

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}$$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN}$$



Hình 107

Cộng hai đẳng thức trên ta có:

$$2\overrightarrow{MN} = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD}) + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} + (\overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CN})$$

$$= \vec{0} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} + \vec{0} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$$

Đẳng thức $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$ chứng tỏ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng

Câu 27: (xem Hình 108)

Khẳng định (A) là đúng (xem chứng minh ở câu trên)

Khẳng định (B) là đúng, có thể sử dụng phương pháp tổng hợp hoặc vectơ để chứng minh khẳng định đúng này tương tự như chứng minh câu trên

Ta chứng minh khẳng định (C) là sai

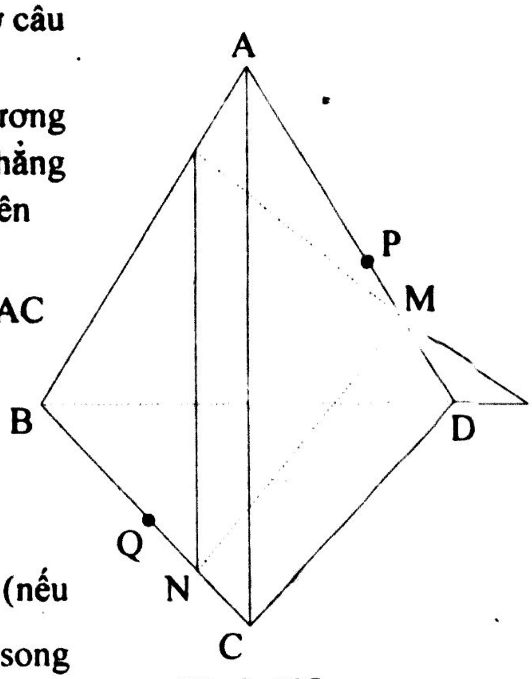
Ta lấy điểm K trên cạnh AB sao cho NK // AC

Ta có: $\dfrac{AK}{KB} = \dfrac{1}{3}$ và $\dfrac{AM}{MD} = 3$

nên BD cắt KM

Vì vậy BD cắt (KMN)

Vậy $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{MN}$ không đồng phẳng (nếu $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng thì BD phải song song hoặc chứa trong (KMN))



Hình 108

ĐS: (C)

Câu 28: Ta chứng minh $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{IK}$, $\overrightarrow{GF}$ đồng phẳng bằng hai cách

Cách 1: Phương pháp tổng hợp (xem hình 109)

Ta chứng minh các đường thẳng BD, IK, GF song song hoặc chứa trong (ABCD)

Ta có: $BD \subset (ABCD)$ (1)

$GF // BC \Rightarrow GF // (ABCD)$ (2)

Mặt khác

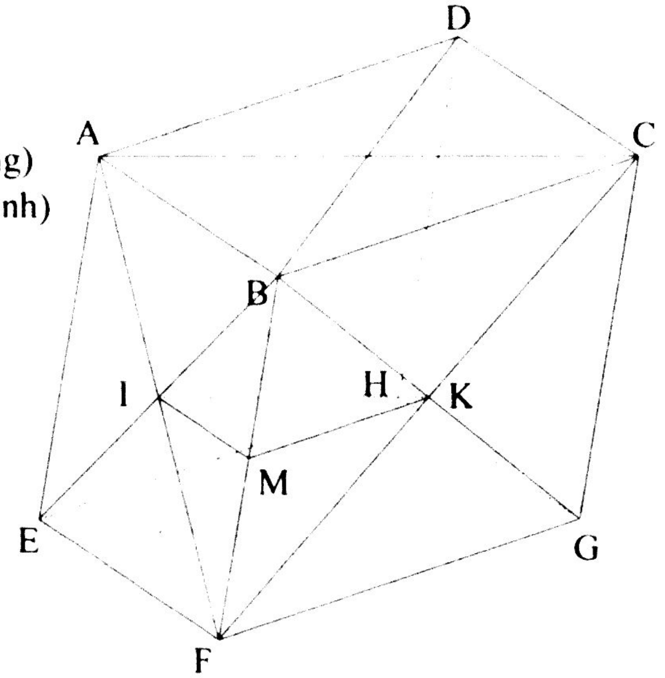
$IM // AB$ (tính chất đường song song)

$MK // BC$ (tính chất đường trung bình)

$\Rightarrow (IMK) // (ABCD)$

$\Rightarrow IK // (ABCD)$ (3)

(1), (2), (3) $\Rightarrow$ $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{IK}$, $\overrightarrow{GF}$ đồng phẳng



Hình 109

Cách 2: Phương pháp vectơ:

Biểu diễn $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{IK}$, $\overrightarrow{GF}$ theo 3 vectơ không đồng phẳng $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE}$

Ta có:

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{GF} = -\overrightarrow{AD}$$

Gọi M là trung điểm của BF ta có

$$\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{MK} = 0,5(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BD} + 2\overrightarrow{GF} - 2\overrightarrow{IK} = \vec{0}$$

Vậy $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{IK}$, $\overrightarrow{GF}$ đồng phẳng

ĐS: (A)

Câu 29: Đặt $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$; $\overrightarrow{BB'} = \vec{b}$; $\overrightarrow{BC} = \vec{c}$ (xem Hình 110)

Ta có:

$$\overrightarrow{BD'} = \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{B'A'} + \overrightarrow{A'D'} = \vec{b} + \vec{a} + \vec{c}$$

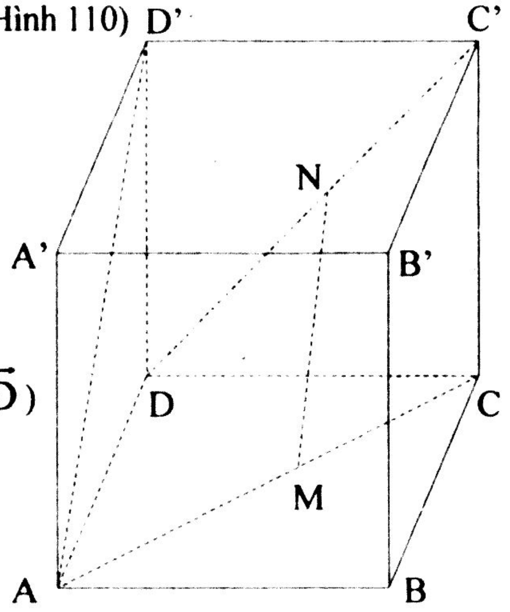
$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'N}$$

$$= \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CC'} + x\overrightarrow{C'D}$$

$$= \frac{1}{3}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}) + \overrightarrow{CC'} + x(\overrightarrow{C'C} + \overrightarrow{CD})$$

$$= \frac{1}{3}(\vec{c} - \vec{a}) + \vec{b} + x(\vec{a} - \vec{b})$$

$$= (1 - x)\vec{b} + (x - \frac{1}{3})\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{c}$$



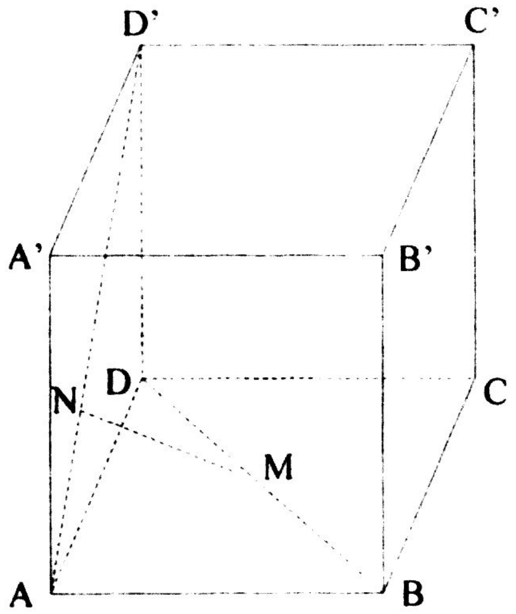
Hình 110

$\overrightarrow{BD'}$, $\overrightarrow{MN}$ cùng phương $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{MN} = t\overrightarrow{BD'}$

$$\Leftrightarrow (1 - x) = (x - \frac{1}{3}) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$$

ĐS: (A)

Câu 30: Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$; $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$ (xem Hình 111)



Hình 111

Đặt DM = xDB $\Rightarrow$ AN = xAD'. Ta có:

$\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AM}$

$= -x\overrightarrow{AD'} + (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DM})$

$= -x(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}) + \overrightarrow{AD} + x\overrightarrow{DB}$

$= -x(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}) + \overrightarrow{AD} + x(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC})$

$= -x(\vec{b} + \vec{c}) + \vec{b} + x(-\vec{b} + \vec{a})$

$= x(\vec{a} - \vec{c}) + (1 - 2x)\vec{b}$

$= x\overrightarrow{A'B} + (1 - 2x)\overrightarrow{AD}$

$= x\overrightarrow{A'B} + (1 - 2x)\overrightarrow{BC}$ (do $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$)

Vậy $\overrightarrow{NM}$, $\overrightarrow{A'B}$, $\overrightarrow{BC}$ đồng phẳng, hay MN // (A'D'BC)

ĐS: (A)

§2. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC NHAU

TÓM TẮT LÍ THUYẾT

I. Tích vô hướng của hai vectơ trong không gian

1. Góc giữa hai vectơ: Cho $\vec{u}$, $\vec{v}$ là hai vectơ trong không gian. Từ điểm A bất kì vẽ $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$, khi đó góc $\widehat{BAC}$ là góc giữa $\vec{u}$, $\vec{v}$, kí hiệu $(\vec{u}, \vec{v})$

2. Tích vô hướng: $\vec{u}\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|\cos(\vec{u}, \vec{v})$

3. $|\vec{u}| = \sqrt{|\vec{u}|^2}$

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$

$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$

II. Góc giữa hai đường thẳng: Góc giữa hai đường thẳng trong không gian là góc giữa hai đường thẳng cắt nhau lần lượt song song với hai đường thẳng đó và cùng đi qua một điểm

III. Hai đường thẳng vuông góc:

1. Hai đường thẳng được gọi là vuông góc nếu góc giữa chúng bằng 90^0

2. Nếu hai đường thẳng a, b lần lượt có vectơ chỉ phương là $\vec{u}$, $\vec{v}$, ta có

$a \perp b \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$

3. Nếu $a // b$ và $c \perp b \Rightarrow c \perp a$

CÁC DẠNG TOÁN CƠ BẢN

I. Dạng toán 1: Tính góc giữa hai vectơ. Chứng minh hai vectơ vuông góc

Phương pháp: Sử dụng định nghĩa, chú ý các kết quả sau

- $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$
- $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$
- $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}\vec{v} + \vec{v}^2$
- $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}\vec{v} + \vec{v}^2$

VD1 : Cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ thoả $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 3$, $|\vec{a} - \vec{b}| = 4$. Tính góc giữa hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$

Giải

Gọi α góc giữa hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$

Ta có:

$$|\vec{a}-\vec{b}|^2 = (\vec{a}-\vec{b})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha$$
$$= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha$$

Thế các đại lượng đã cho ở giả thiết ta có:

$$16 = 25 - 24\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$$

VD2: Cho tứ diện ABCD có hai mặt ABC và ABD là hai tam giác đều. Chứng minh AB và CD vuông góc

Giải

Ta sử dụng phương pháp vectơ để giải bài toán này bằng cách tính $\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{CD}$ (xem Hình 112)

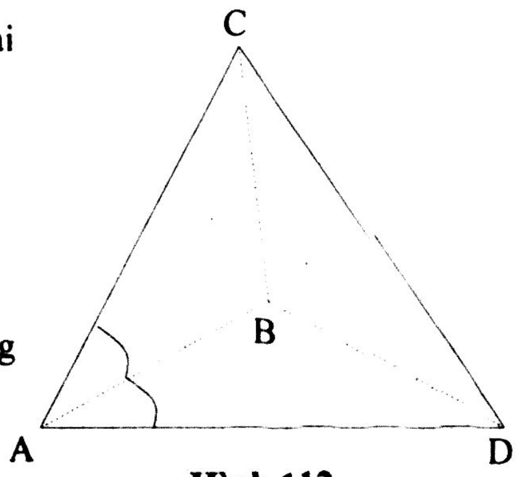
Ta có: $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC})$$
$$= \overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}$$

Vì ABC và ABD là các tam giác đều bằng nhau nên

$$\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{CD} = 0$$

Vậy $AB \perp CD$



Hình 112

II. Dạng toán 2: Chứng minh đẳng thức hình học

> ***Phương pháp:*** Sử dụng các kiến thức về vectơ, tích vô hướng, các phép toán về vectơ để chứng minh vế này bằng vế kia, hoặc biến đổi tương đương đẳng thức cần chứng minh về đẳng thức mà ta biết đúng

VD1: Cho tứ diện ABCD có trọng tâm G. Chứng minh hệ thức

$$AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 + CD^2 = 4(GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2)$$

Giải

Ta có:

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$$

Bình phương vô hướng hai vế ta có:

$$GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2 + 2\overrightarrow{GA}\,\overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GA}\,\overrightarrow{GC}$$
$$+ 2\overrightarrow{GA}\,\overrightarrow{GD} + 2\overrightarrow{GB}\,\overrightarrow{GC} + 2\overrightarrow{GB}\,\overrightarrow{GD} + 2\overrightarrow{GC}\,\overrightarrow{GD} = 0\ (*)$$

Mặt khác:

$$AB^2 = \overrightarrow{AB}^2 = (\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GA})^2 = \overrightarrow{GB}^2 - 2\overrightarrow{GB}\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GA}^2$$
$$= GA^2 + GB^2 - 2\overrightarrow{GA}\,\overrightarrow{GB}$$

$\Rightarrow 2\overrightarrow{GA}\,\overrightarrow{GB} = GA^2 + GB^2 - AB^2$ và các đẳng thức tương tự, thế vào (*) và biến đổi ta có

$$AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 + CD^2 = 4(GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2)$$

VD2: Cho tứ diện ABCD.

Chứng minh điều kiện cần và đủ để $AC \perp BD$ là $AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$

Giải

$$AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2 \Leftrightarrow (\overrightarrow{BA}^2 - \overrightarrow{BC}^2) + (\overrightarrow{DC}^2 - \overrightarrow{DA}^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC})(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA})(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{CA}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{AC}(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{CA}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{CA}[(\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{DA}) + (\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DC})] = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{CA}\,\overrightarrow{BD} = 0 \Leftrightarrow AC \perp BD$$

III. Dạng toán 3: Tính góc giữa hai đường thẳng. Chứng minh hai đường thẳng vuông góc

Phương pháp: Để tính góc giữa hai đường thẳng a, b ta có thể sử dụng các phương pháp sau

- Sử dụng định nghĩa, qui về tính toán trong mặt phẳng, chú ý định lí côsin, sin, tỉ số lượng giác trong tam giác vuông...
- Dùng tích vô hướng: giả sử a, b lần lượt có vectơ chỉ phương $\vec{u}, \vec{v}$, φ là góc giữa a và b, ta có:

$$\cos\varphi = |\cos(\vec{u}, \vec{v})| = \left| \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} \right|$$

Nếu $\vec{u}.\vec{v} = 0$ thì a và b vuông góc nhau

VD1: Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$.

a) Góc giữa AC và DA_1 bằng bao nhiêu?

b) Gọi M là trung điểm của AD. Tính góc giữa A_1M và AC

Giải

a) Sử dụng phương pháp tổng hợp (xem Hình 113)

Vì $AC // A_1C_1$

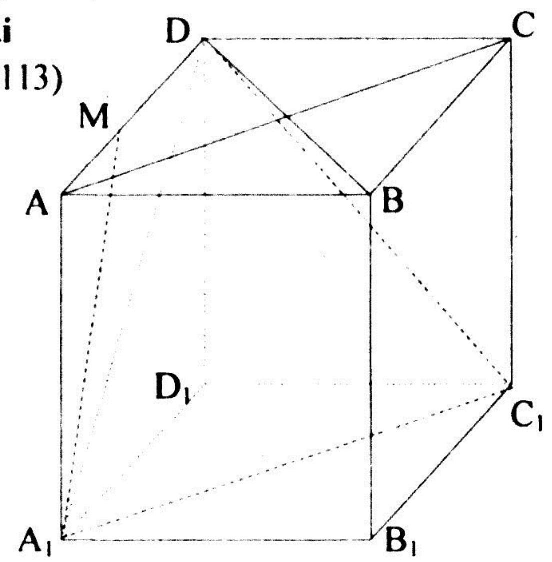
Nên góc giữa AC và DA_1 là góc $\widehat{DA_1C_1}$

Dễ thấy rằng tam giác DA_1C_1 đều nên $\widehat{DA_1C_1} = 60^0$

Vậy góc giữa AC và DA_1 bằng 60^0

b) Ta sử dụng phương pháp vectơ để giải bài toán này

Gọi góc giữa AC và A_1M là α



Hình 113

Ta tính $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{MA_1}$ bằng cách biểu diễn $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{MA_1}$ theo các vectơ thuộc các cạnh của hình lập phương $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AA_1}$. Ta có:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD};$$

$$\overrightarrow{MA_1} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AA_1} = -0{,}5\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AC}\ \overrightarrow{MA_1} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(-0{,}5\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1})$$

$$= -0{,}5\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AA_1} - 0{,}5\overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{AD}\ \overrightarrow{AA_1}$$

$$= -0{,}5a^2 \quad (*)$$

Ta có: $AC = a\sqrt{2}$

$$MA_1 = \sqrt{a^2 + (\frac{a}{2})^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

$$(*) \Leftrightarrow a\sqrt{2}.\frac{a\sqrt{5}}{2}\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MA_1}) = -0{,}5a^2 \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MA_1}) = -\frac{1}{\sqrt{10}}$$

Vậy $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$

VD2: Cho tứ diện đều ABCD cạnh a. Chứng minh AB vuông góc với CD

Giải

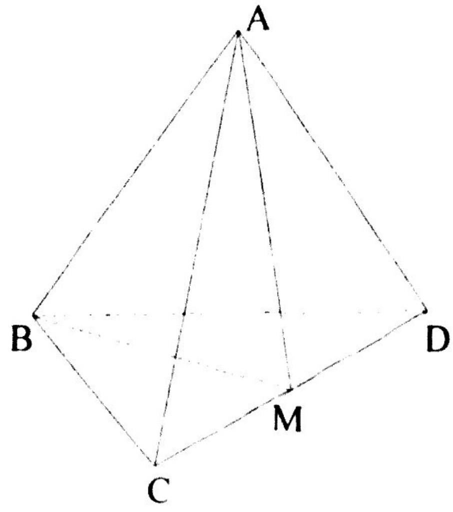
Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$

Ta có $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} = \vec{c} - \vec{b}$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \vec{a}(\vec{c} - \vec{b}) = \vec{a}.\vec{c} - \vec{a}.\vec{b}$$

$$= 0{,}5.a.a - 0{,}5.a.a = 0$$

Vậy AB vuông góc với CD



Hình 114

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai?

(A) Hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì song song nhau

☐ đúng, ☐ sai

(B) Cho hai đường thẳng song song a, b. Nếu a vuông góc với đường thẳng c thì b cũng vuông góc với c

☐ đúng, ☐ sai

(C) Cho hai đường thẳng phân biệt a, b. Nếu đường thẳng c vuông góc với a và b thì a, b, c không đồng phẳng

đúng, sai

Câu 2: Trong không gian cho ba điểm A, B, C bất kì. Chọn đẳng thức đúng

(A) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB^2 + AC^2 - BC^2$

(B) $2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB^2 + AC^2 - 2BC^2$

(C) $2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB^2 + AC^2 - BC^2$

(D) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB^2 + AC^2 - 2BC^2$

Câu 3: Cho $|\vec{a}| = 3$; $|\vec{b}| = 5$, góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng 120^0. Chọn khẳng định sai

(A) $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{19}$ **(B)** $|\vec{a} - \vec{b}| = 7$

(C) $|\vec{a} + 2\vec{b}| = 9$ **(D)** $|\vec{a} - 2\vec{b}| = \sqrt{139}$

Câu 4: Cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ thoả mãn: $|\vec{a}| = 26$; $|\vec{b}| = 28$; $|\vec{a}$ [illegible] $| = 48$. Độ dài của vectơ $(\vec{a} - \vec{b})$ bằng bao nhiêu?

(A) $\sqrt{616}$ **(B)** [illegible] **(C)** [illegible] **(D)** 25

Câu 5: Cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ thoả $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 3$, $|\vec{a} - \vec{b}| = 4$. Gọi α góc giữa hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$. Chọn khẳng định đúng

(A) $\cos\alpha = \frac{3}{8}$ **(B)** $\cos\alpha = \frac{1}{3}$

(C) $\alpha = 60^0$ **(D)** $\alpha = 30^0$

Câu 6: Cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ thoả mãn $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 3$, $\vec{a}.\vec{b} = 10$. Xét hai vectơ $\vec{x} = \vec{a} - 2\vec{b}$, $\vec{y} = \vec{a} - \vec{b}$. Gọi α góc giữa hai vectơ $\vec{x}$, $\vec{y}$. Chọn khẳng định đúng

(A) $\cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{115}}$ **(B)** $\cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{115}}$

(C) $\cos\alpha = \frac{6}{\sqrt{115}}$ **(D)** $\cos\alpha = \frac{8}{\sqrt{115}}$

Câu 7: Cho tứ diện đều ABCD. Góc giữa AB và CD bằng bao nhiêu?

(A) 30^0 **(B)** 60^0 **(C)** 90^0 **(D)** 45^0

Câu 8: Cho tứ diện ABCD với AB ⊥ AC, AB ⊥ BD. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AB và CD. Góc giữa PQ và AB bằng bao nhiêu?

(A) 60^0 **(B)** 90^0 **(C)** 45^0 **(D)** 30^0

Câu 9: Cho tứ diện ABCD có hai mặt ABC và ABD là các tam giác đều. Góc giữa AB và CD bằng bao nhiêu?

(A) 60^0 **(B)** 90^0 **(C)** 30^0 **(D)** 120^0

Câu 10: Cho tứ diện ABCD với AC = 1,5AD, $\angle CAB = \angle DAB = 60^0$, CD = AD. Gọi φ là góc giữa AB và CD. Chọn khẳng định đúng

(A) $\varphi = 60^0$ **(B)** $\cos\varphi = \frac{1}{4}$

(C) $\cos\varphi = \frac{3}{4}$ **(D)** 30^0

Câu 11: Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Chọn khẳng định sai?

(A) Góc giữa BD và A_1C_1 bằng 90^0

(B) Góc giữa AC và B_1D_1 bằng 90^0

(C) Góc giữa AD và B_1C bằng 45^0

(D) Góc giữa B_1D_1 và AA_1 bằng 60^0

Câu 12: Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Góc giữa AC và DA_1 bằng bao nhiêu?

(A) 60^0 **(B)** 45^0 **(C)** 90^0 **(D)** 120^0

Câu 13: Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có cạnh a. Gọi M là trung điểm của AD. Giá trị $\overrightarrow{B_1M}\ \overrightarrow{BD_1}$ bằng

(A) $0,5a^2$ **(B)** a^2 **(C)** $0,75a^2$ **(D)** $1,5a^2$

Câu 14: Trong không gian cho tam giác ABC có trọng tâm G. Chọn hệ thức đúng?

(A) $AB^2 + AC^2 + BC^2 = 3(GA^2 + GB^2 + GC^2)$

(B) $AB^2 + AC^2 + BC^2 = 2(GA^2 + GB^2 + GC^2)$

(C) $AB^2 + AC^2 + BC^2 = 4(GA^2 + GB^2 + GC^2)$

(D) $AB^2 + AC^2 + BC^2 = GA^2 + GB^2 + GC^2$

Câu 15: Trong không gian cho tam giác ABC. Tìm điểm M sao cho giá trị của biểu thức: $\Sigma = MA^2 + MB^2 + MC^2$ đạt giá trị bé nhất

(A) M là trực tâm của tam giác ABC

(B) M là trọng tâm của tam giác ABC

(C) M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

(D) M là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC

Câu 16: Cho tứ diện ABCD có trọng tâm G. Chọn đẳng thức đúng?

(A) $AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 + CD^2 = 2(GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2)$

(B) $AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 + CD^2 = 3(GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2)$

(C) $AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 + CD^2 = 4(GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2)$

(D) $AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 + CD^2 = 6(GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2)$

Câu 17: Cho tứ diện ABCD trong đó AB = 6, CD = 3 và góc giữa AB và CD là 60^0, và điểm M trên cạnh BC sao cho BM = 2MC. mp(P) qua M song song với AB và CD. (P) cắt BD, AD, AC lần lượt tại N, P, Q. Diện tích MNPQ bằng bao nhiêu?

(A) $2\sqrt{3}$ **(B)** 2 **(C)** $2\sqrt{2}$ **(D)** 1,5

Câu 18: Cho tứ diện ABCD có AB vuông góc với CD. mp(P) song song với AB và CD lần lượt cắt BC, DB, AD, AC tại M, N, P, Q. Tứ giác MNPQ là hình gì?

(A) Hình thang (B) Hình bình hành

(C) Hình chữ nhật (D) Tứ giác không phải hình thang

Câu 19: Cho tứ diện ABCD có AB vuông góc với CD, AB = 4, CD = 6. M là điểm thuộc cạnh BC sao cho MC = 2BM. mp(P) song song với AB và CD đi qua M. Diện tích thiết diện của (P) và tứ diện ABCD bằng bao nhiêu?

(A) 5 (B) $\frac{16}{3}$ (C) $\frac{17}{3}$ (D) 6

Câu 20: Cho tứ diện ABCD có AB vuông góc với CD, AB = CD = 6. M là điểm thuộc cạnh BC sao cho MC = xBC (1 > x > 0). mp(P) song song với AB và CD lần lượt cắt BC, DB, AD, AC tại M, N, P, Q. Diện tích lớn nhất của tứ giác MNPQ bằng bao nhiêu?

(A) 10 (B) 9 (C) 8 (D) 11

Câu 21: Cho tứ diện đều ABCD cạnh bằng a. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD. Góc giữa AO và CD bằng bao nhiêu?

(A) 60^0 (B) 90^0 (C) 30^0 (D) 0^0

Câu 22: Cho tứ diện đều ABCD cạnh bằng a. Gọi M là trung điểm CD. Gọi α là góc giữa AC và BM. Chọn khẳng định đúng

(A) $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (B) $\alpha = 60^0$ (C) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$ (D) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{6}$

TRẢ LỜI

Câu 1:

(A) Khẳng định sai. Hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba có tất cả các vị trí tương đối của hai đường thẳng (song song nhau, trùng nhau, cắt nhau, chéo nhau)

(B) Khẳng định đúng

(C) Khẳng định sai

Câu 2: Với ba điểm A, B, C bất kì ta có:

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$$

Bình phương vô hướng hai vế ta có:

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB^2 + AC^2 - BC^2$$

ĐS: (C)

Câu 3: Bình phương vô hướng hai vế các biểu thức cần tính

(A) $(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos120^0$

$= 9 + 25 + 2.3.5.(-0,5) = 34 - 15 = 19$

$\Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{19}$

(B) $(\vec{a} - \vec{b})^2 = 34 + 15 = 49 \Rightarrow |\vec{a} - \vec{b}| = 7$

(C) $(\vec{a} + 2\vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 4\vec{b}^2 + 4\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}|^2 + 4|\vec{b}|^2 + 4|\vec{a}||\vec{b}|\cos 120^0$

$$= 9 + 100 + 4.3.5.(-0,5) = 109 - 30 = 79$$

Vậy $|\vec{a} + 2\vec{b}| = \sqrt{79}$

ĐS: (C)

Câu 4: Ta có:

$$(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a}\vec{b}$$

$$(\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{a}\vec{b}$$

Cộng hai đẳng thức trên vế theo vế ta có:

$$(\vec{a} + \vec{b})^2 + (\vec{a} - \vec{b})^2 = 2(\vec{a}^2 + \vec{b}^2)$$

Thế các đại lượng đã biết vào đẳng thức trên ta có:

$$48^2 + (\vec{a} - \vec{b})^2 = 2(26^2 + 28^2)$$

$$\Rightarrow (\vec{a} - \vec{b})^2 = 616 \Rightarrow |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{616}$$

ĐS: (A)

Câu 5: Ta có:

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha$$

Thế các đại lượng đã cho ở giả thiết ta có:

$$16 = 25 - 24\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$$

ĐS: (A)

Câu 6: Sử dụng công thức $\vec{x}\vec{y} = |\vec{x}|.|\vec{y}|.\cos\alpha$

Ta có $\vec{x}\vec{y} = (\vec{a} + 2\vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 + \vec{a}\vec{b} - 2\vec{b}^2 = 16 + 10 - 18 = 8$

$$\vec{x}^2 = (\vec{a} + 2\vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 4\vec{a}\vec{b} + 4\vec{b}^2 = 16 + 40 + 36 = 92$$

$$\Rightarrow |\vec{x}| = 2\sqrt{23}$$

$$\vec{y}^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2 = 16 - 20 + 9 = 5$$

$$\Rightarrow |\vec{y}| = \sqrt{5}$$

Vậy $\cos\alpha = \dfrac{\vec{x}\vec{y}}{|\vec{x}||\vec{y}|} = \dfrac{8}{2\sqrt{115}} = \dfrac{4}{\sqrt{115}}$

ĐS: (B)

Câu 7: Ta dùng phương pháp vectơ để giải bài toán này

$$\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC})$$

$$= \overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}$$

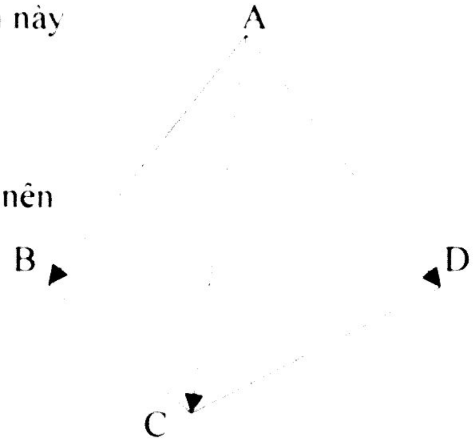
Vì ABC và ABD là các tam giác đều bằng nhau nên

$$\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{CD} = 0$$

Vậy $AB \perp CD$ (xem Hình 115)

ĐS: C)



Hình 115

Câu 8: Ta sử dụng phương pháp vectơ để giải bài toán này bằng các tính $\overrightarrow{AB}\overrightarrow{PQ}$.

Ta biểu diễn $\overrightarrow{PQ}$ theo $\overrightarrow{BD}$ và $\overrightarrow{AC}$ (Xem Hình 116), ta có:

$$2\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$$

$$\Rightarrow 2\overrightarrow{AB}\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$$

$$= \overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{BD}$$

Theo giả thiết:

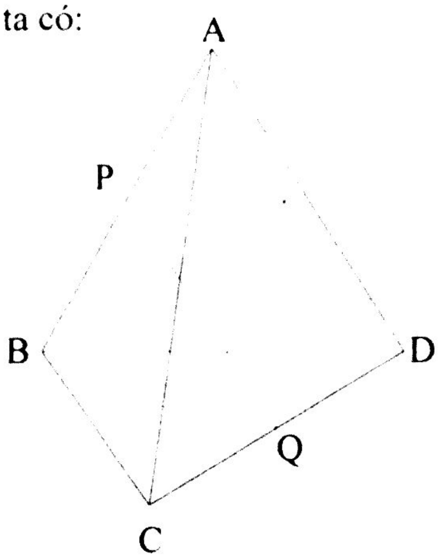
$$AB \perp AC \Rightarrow \overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC} = 0$$

$$AB \perp BD \Rightarrow \overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{BD} = 0$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB}\overrightarrow{PQ} = 0$$

Vậy góc giữa PQ và AB bằng 90^0

ĐS: B)



Hình 116

Câu 9:

Ta sử dụng phương pháp vectơ để giải bài toán này bằng cách tính $\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{CD}$

Ta có: $\overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC})$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}\,(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC})$$

$$= \overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}$$

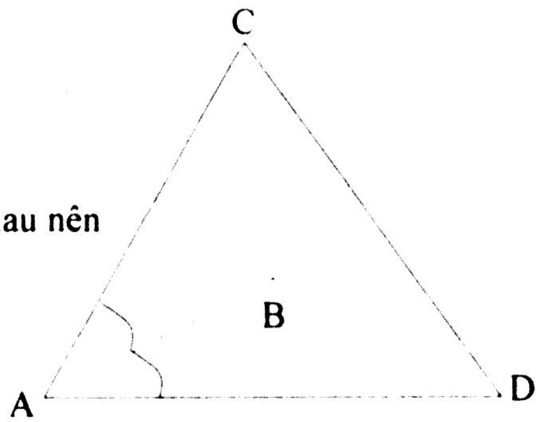
Vì ABC và ABD là các tam giác đều bằng nhau nên

$$\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{CD} = 0$$

Vậy $AB \perp CD$

ĐS: B)



Hình 117

Câu 10 (xem Hình 117)

Gọi α là góc giữa $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$

Ta có $\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}\,(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}$ (*)

$$\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AD} = AB.AD.\cos 60^0 = \frac{1}{2}AB.AD$$

$$\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC} = AB.AC.\cos 60^0 = \frac{1}{2}AB.1{,}5.AD = \frac{3}{4}AB.AD$$

$$\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{CD} = AB.CD.\cos\alpha = AB.AD.\cos\alpha$$

Thế vào (*) ta có:

$$AB.AD.\cos\alpha = \frac{1}{2}AB.\,AD - \frac{3}{4}AB.AD = -\frac{1}{4}AB.\,AD$$

$\Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{4} \Rightarrow \cos\varphi = \frac{1}{4}$

ĐS: (B)

Câu 11: (xem Hình 118)

(A) Vì $A_1C_1 \parallel AC$

nên $(BD, A_1C_1) = (BD, AC) = 90^0$.

Khẳng định đúng

(B) Vì $B_1D_1 \parallel BD$

nên $(AC, B_1D_1) = (AC, BD) = 90^0$.

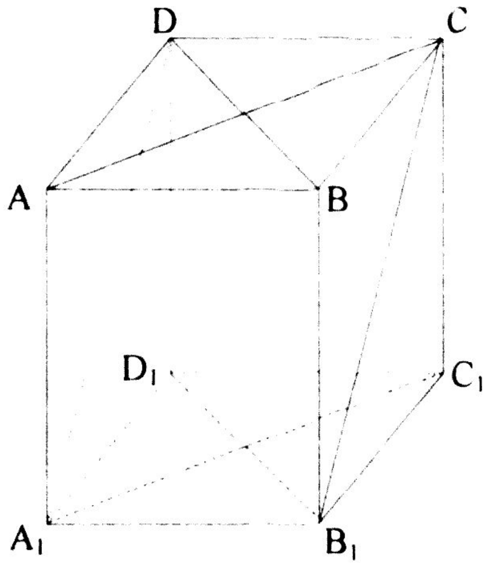
Khẳng định đúng

(C) Vì $B_1C \parallel A_1D$

nên $(AD, B_1C) = (AD, A_1D) = 45^0$.

Khẳng định đúng

ĐS: (D)



Hình 118

Câu 12: Vì $AC \parallel A_1C_1$ nên

Góc giữa AC và DA_1 bằng góc $\angle DA_1C_1$

Dễ nhận thấy DA_1C_1 là tam giác đều, nên $\angle DA_1C_1 = 60^0$

Vì vậy góc giữa AC và DA_1 bằng 60^0

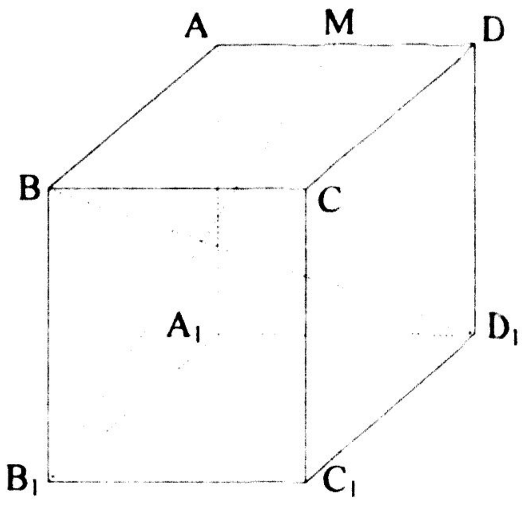
ĐS: (A)

Câu 13: (xem Hình 119)

Ta có:

$$\overrightarrow{B_1M} = \overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}$$
$$= \overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{B_1A_1} + 0{,}5\,\overrightarrow{B_1C_1}$$

$$\overrightarrow{BD_1} = \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{A_1D_1}$$
$$= -\overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{B_1C_1}$$



Hình 119

Vậy: $\overrightarrow{B_1M}.\overrightarrow{BD_1} = (\overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{B_1A_1} + 0{,}5\overrightarrow{B_1C_1})(-\overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{B_1C_1})$

$$= -\overrightarrow{B_1B}^2 + \overrightarrow{B_1A_1}^2 + 0{,}5\overrightarrow{B_1C_1}^2 = 0{,}5a^2$$

ĐS: (A)

Câu 14: Ta có $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

Bình phương vô hướng hai vế ta có

$$GA^2 + GB^2 + GC^2 + 2\overrightarrow{GA}\overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GA}\overrightarrow{GC} + 2\overrightarrow{GB}\overrightarrow{GC} = 0\ (*)$$

Thế $2\overrightarrow{GA}\overrightarrow{GB} = GA^2 + GB^2 - AB^2$ và các đẳng thức tương tự vào (*) ta có:

$GA^2 + GB^2 + GC^2 + GA^2 + GB^2 - AB^2 + GA^2 + GC^2 - AC^2 + GB^2 + GC^2 - BC^2 = 0$

$\Leftrightarrow AB^2 + AC^2 + BC^2 = 3(GA^2 + GB^2 + GC^2)$

ĐS: (A)

Câu 15:

Với mọi điểm G ta có

$$\Sigma = MA^2 + MB^2 + MC^2 = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2$$

$$= 4MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + 2\overrightarrow{MG}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC})$$

Chọn G là trọng tâm của ABC thì $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$, vì vậy

$$\Sigma = 4MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 \geq GA^2 + GB^2 + GC^2$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow MG = 0 \Leftrightarrow M \equiv G$

ĐS: (B)

Câu 16: Ta có: $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

Bình phương vô hướng hai vế ta có:

$$GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2 + 2\overrightarrow{GA}\,\overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GA}\,\overrightarrow{GC} + 2\overrightarrow{GA}\,\overrightarrow{GD}$$
$$+ 2\overrightarrow{GB}\,\overrightarrow{GC} + 2\overrightarrow{GB}\,\overrightarrow{GD} + 2\overrightarrow{GC}\,\overrightarrow{GD} = 0$$

Chú ý đẳng thức $2\overrightarrow{GA}\,\overrightarrow{GB} = GA^2 + GB^2 - AB^2$ và các đẳng thức tương tự ta có

$$AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 + CD^2 = 4(GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2)$$

ĐS: (C)

Câu 17: (xem Hình 120)

Dễ chứng minh MNPQ là hình bình hành

Theo định lí Talet ta có:

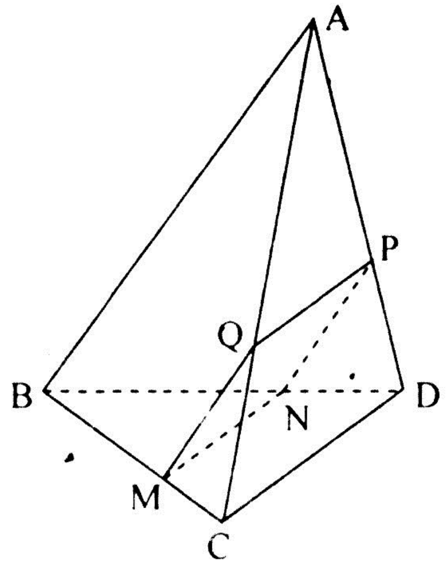
$$\frac{MN}{CD} = \frac{BM}{BC} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow MN = \frac{2}{3}CD = 2$$

$$\Rightarrow MQ = \frac{1}{3}AB = 2$$

Lại có MQ // AB, MN // CD, nên

$\widehat{QMN} = (AB, CD) = 60^0$



Hình 120

$S(MNPQ) = 2S(MNQ) = 2.0,5.MN.MQ.\sin 60^0 = 2\sqrt{3}$

ĐS: (A)

Câu 18: (xem Hình 121)

Chứng minh tương tự câu 14 ta có

MQ // AB; MN // CD

Vì vậy $\angle$ QMN = (AB, CD)

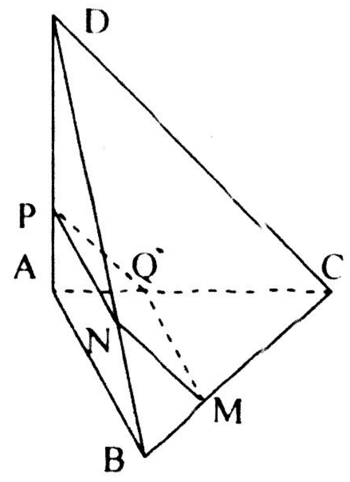
Mà AB $\perp$ CD (giả thiết)

Vậy $\angle QMN = 90^0$

Lại theo câu 8 ở trên thì MNPQ là hình bình hành

Vậy MNPQ là hình chữ nhật

ĐS: (C)



Hình 121

Câu 19: (xem Hình 122)

Theo câu 9 ở trên thì MNPQ là hình chữ nhật

Áp dụng định lí Talet vào tam giác ABC ta có:

$$\frac{QM}{AB} = \frac{CM}{CB} = \frac{2}{3}$$

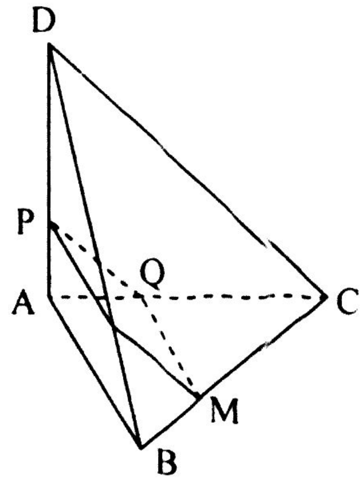
$$\Rightarrow QM = \frac{2}{3}AB = \frac{8}{3}$$

Tính toán tương tự ta có:

$$MN = \frac{1}{3}CD = 2$$

Vậy diện tích hình chữ nhật MNPQ bằng $\frac{8}{3}.2 = \frac{16}{3}$

ĐS: (B)



Hình 122

Câu 20: (xem Hình 123)

Theo câu 19 ở trên thì MNPQ là hình chữ nhật

Áp dụng định lí Talet vào tam giác ABC ta có:

$$\frac{QM}{AB} = \frac{CM}{CB} = x$$

$\Rightarrow QM = xAB = 6x$

Tính toán tương tự ta có:

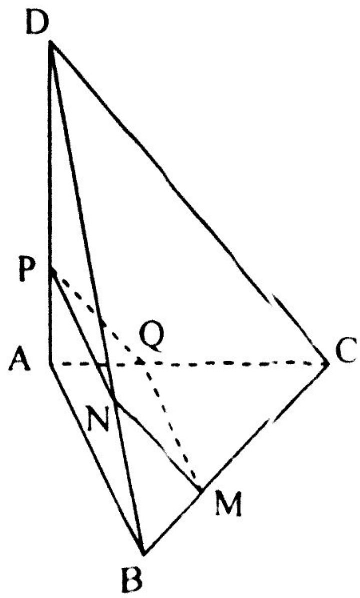
$$MN = \frac{BM}{BC}CD = \frac{BC - CM}{BC}6 = (1 - x)6$$

Vậy diện tích hình chữ nhật MNPQ là $S = 36x(1 - x)$

S lớn nhất $\Leftrightarrow x = 1 - x \Leftrightarrow x = 0,5$

Gía trị lớn nhất của S bằng $36.0,5.0,5 = 9$

ĐS: (B)



Hình 123

Câu 21: (xem Hình 124)

Gọi M là trung điểm của CD

Qua O vẽ đường thẳng song song với CD cắt BC tại E, BD tại F

Ta có (AO, EF) = (AO, CD)

Tam giác BCD cân tại B, EF // CD nên

$BE = BF$ và $OE = OF$

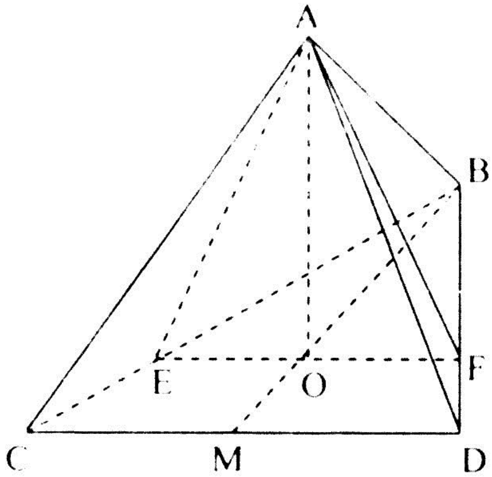
$\Rightarrow \Delta ABE = \Delta ABF$ (c–g–c)

$\Rightarrow AE = AF$

Tam giác AEF cân có trung tuyến AO vừa là đường cao nên $AOE = 90^0$

Vậy $(AO, CD) = 90^0$

ĐS: (B)



Hình 124

Câu 22: (xem Hình 125)

Gọi N là trung điểm AD ta có

MN // AC (đường trung bình của tam giác ACD)

$\Rightarrow$ (BM, MN) = (AC, BM)

Ta có:

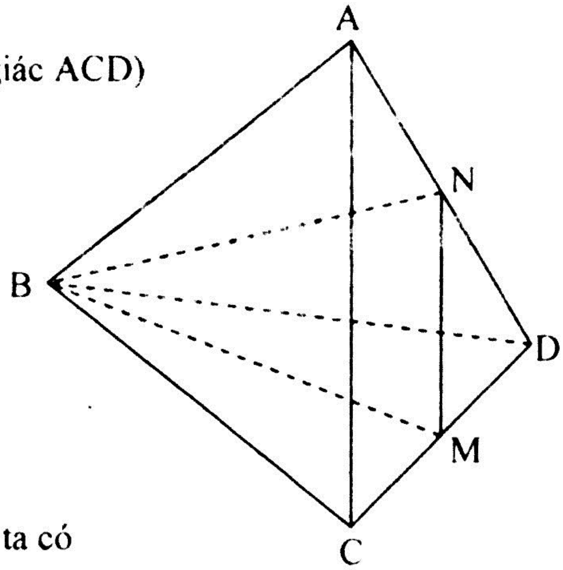
$BM = BN = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ (đường cao tam giác đều)

$MN = \dfrac{a}{2}$ (đường trung bình tam giác ACD)

Áp dụng định lí Côsin cho tam giác BMN ta có

$$\cos\widehat{BMN} = \frac{BM^2 + MN^2 - BN^2}{2BM.MN} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

ĐS: (D)



Hình 125

§3. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

TÓM TẮT LÍ THUYẾT

I. Định nghĩa: Đường thẳng a được gọi là vuông góc với mặt phẳng (P) nến a vuông góc với mọi đường thẳng thuộc (P), kí hiệu a $\perp$ (P)

II. Điều kiện để đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P)

Đường thẳng a vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau thuộc mặt phẳng (P) thì a vuông góc với (P)

III. Tính chất:

1. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước

2. Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước

IV. Sự liên quan giữa quan hệ song song và quan hệ vuông góc:

1. Cho hai đường thẳng song song. Mặt phẳng nào vuông góc với đường thẳng này thì cũng vuông góc với đường thẳng kia

2. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau

3. Cho hai mặt phẳng song song, đường thẳng nào vuông góc với mặt phẳng này thì cũng vuông góc với mặt phẳng kia

4. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau

5. Cho đường thẳng a và mặt phẳng (P) song song nhau. Đường thẳng nào vuông góc với (P) thì cũng vuông góc với a

6. Nếu một đường thẳng và một mặt phẳng (không chứa đường thẳng đó) cùng vuông góc với một đường thẳng khác thì chúng song song nhau

V. Phép chiếu vuông góc

1. Định nghĩa: Cho đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P). Phép chiếu song song theo phương d lên (P) được gọi là phép chiếu vuông góc lên (P)

2. Định lí ba đường vuông góc: Cho đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (P) và b là đường thẳng không thuộc (P) đồng thời không vuông góc (P). Gọi b' là hình chiếu vuông góc của b lên (P). Khi đó a vuông góc với b khi và chỉ khi a vuông góc với b'

3. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Cho đường thẳng d và mặt phẳng (P). Ta có định nghĩa:

- Nếu d vuông góc với (P) thì ta nói góc giữa d và (P) là 90^0
- Nếu d không vuông góc với (P) thì góc giữa d và hình chiếu d' của d lên (P) được gọi là góc giữa d và (P)

CÁC DẠNG TOÁN CƠ BẢN

I. Dạng toán 1: Chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

Phương pháp: Để chứng minh đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) ta có thể sử dụng hai cách sau:

- Chứng minh đường thẳng a vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau thuộc (P)
- Chứng minh a song song với b mà b vuông góc với (P)

VD1: Cho hình chóp S.ABCD trong đó ABCD là hình chữ nhật, SA $\perp$ (ABCD). AE và AF là đường cao của tam giác SAB và SAD. Chứng minh SC $\perp$ (AEF)

Giải

Ta chứng minh SC $\perp$ (AEF) (xem Hình 126)

Theo giả thiết SA $\perp$ (ABCD), (ABCD) $\supset$ BC

$\Rightarrow$ BC $\perp$ SA (1)

Lại do BC $\perp$ AB (2)

(1) và (2) cho ta BC $\perp$ (SAB), và vì vậy BC $\perp$ AE (vì AE thuộc (SAB)) (3)

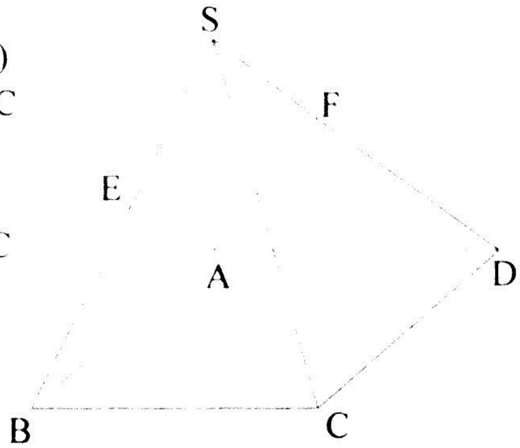
Theo giả thiết AE $\perp$ SB (4)

(3) và (4) $\Rightarrow$ AE $\perp$ (SBC)

$\Rightarrow$ SC $\perp$ AE (5)

Chứng minh tương tự ta có SC $\perp$ AF (6)

(5) và (6) $\Rightarrow$ SC $\perp$ (AEF)



Hình 126

VD2: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SAB là tam giác đều, SC = a$\sqrt{2}$ .Gọi H là trung điểm của AB. Chứng minh SH $\perp$ (ABCD)

Giải

SAB là tam giác đều nên SH $\perp$ AB (1)

Ta chứng minh SH $\perp$ HC. Ta có:

$$SH = a\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow SH^2 = \frac{3a^2}{4}$$

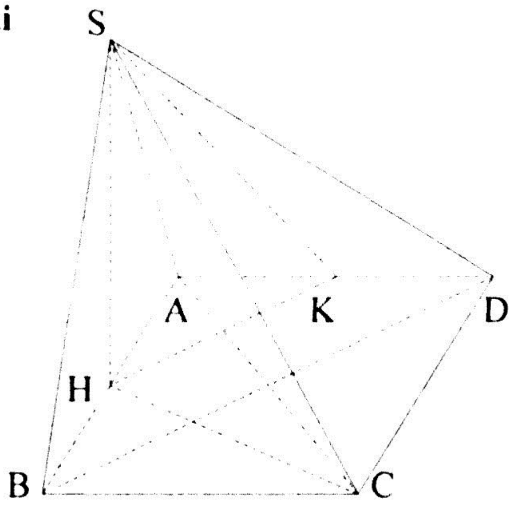
$$HC^2 = HB^2 + BC^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4}$$

$\Rightarrow SH^2 + HC^2 = 2a^2 = SC^2$

Vậy ΔSHC vuông tại H, hay SH $\perp$ HC (2)

(1 và (2) $\Rightarrow$ SH $\perp$ (ABCD)

(xem Hình 127)



Hình 127

II. Dạng toán 2: Chứng minh hai đường thẳng vuông góc nhau

Phương pháp: Ngoài các phương pháp đã giới thiệu ở các mục trước, ta có thể sử dụng thêm 2 cách khác sau đây:

- Để chứng minh đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b, ta tìm mặt phẳng (P) chứa b sao cho việc chứng minh a vuông góc với (P) dễ thực hiện
- Sử dụng định lí ba đường vuông góc

VD1: Cho hình tứ diện OABC có ba cạnh OA, OB, OC vuông góc từng đôi. Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên mp(ABC). Chứng minh

a) H là trực tâm của tam giác ABC

b) $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2} + \dfrac{1}{OA^2}$

Giải

a) $OA \perp OB$, $OA \perp OC \Rightarrow OA \perp (OBC)$ (1)

Vì $BC \subset (OBC)$, nên (1) $\Rightarrow OA \perp BC$ (2)

Lại do $OH \perp (ABC) \Rightarrow OH \perp BC$ (3)

(2) và (3) $\Rightarrow BC \perp (OAH) \Rightarrow BC \perp AH$

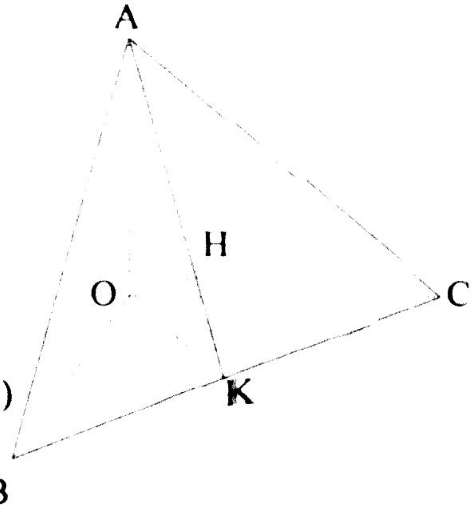
Chứng minh tương tự ta có: $AB \perp CH$

Vậy H là trực tâm của tam giác ABC (xem Hình 128)

b) Gọi $K = AH \cap BC \Rightarrow AK \perp BC$

Tam giác vuông OBC có OK là đường cao

Ta có: $\dfrac{1}{OK^2} = \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$



Hình 128

Lại do OH là đường cao của tam giác vuông OAK ta có:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OK^2} + \frac{1}{OA^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} + \frac{1}{OA^2}$$

VD2: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SAB là tam giác đều, $SC = a\sqrt{2}$. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB và AD

a) Chứng minh $SH \perp (ABCD)$

b) Chứng minh $AC \perp SK$

Giải

a) Xem VD2 phần dạng toán 1

b) $SH \perp (ABCD) \Rightarrow AC \perp SH$ (3)

Lại do ABCD là hình vuông nên $AC \perp BD$

Mặt khác HK // BD

$\Rightarrow AC \perp HK$ (4)

(3) và (4) $\Rightarrow AC \perp (SHK) \Rightarrow AC \perp SK$

III. Dạng toán 3: Thiết diện qua một điểm cho trước và vuông góc với đường thẳng cho trước

Phương pháp: Thường sử dụng các tính chất sau để xác định các đoạn giao tuyến

- Cho các đường thẳng a, b, và mặt phẳng (P)

  Nếu $a \perp b$, $(P) \perp b$, $a \not\subset (P) \Rightarrow a \parallel (P)$

- Cho ba mặt phẳng (P), (Q), (R) phân biệt và $(Q) \cap (R) = a$, $(P) \cap (Q) = b$, $(P) \cap (R) = c$.

  Nếu a, b, c phân biệt và (P) // a thì a // b // c

VD: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân đỉnh B, AB = a, SA vuông góc với (ABC) và SA = $a\sqrt{3}$. M là điểm trên cạnh AB, đặt AM = x ($0 < x < a$). Gọi (P) là mặt phẳng qua M và vuông góc với AB

a) Xác định thiết diện của (P) và hình chóp

b) Tính thiết diện nói trên theo a và x. Định x để diện tích này lớn nhất

Giải

a) Gọi N, P, Q lần lượt là giao điểm của (P) với AC, SC, SB (xem Hình 129)

Vì $BC \perp AB$ và $(P) \perp AB \Rightarrow BC // (P)$

$\Rightarrow MN // BC // QP$

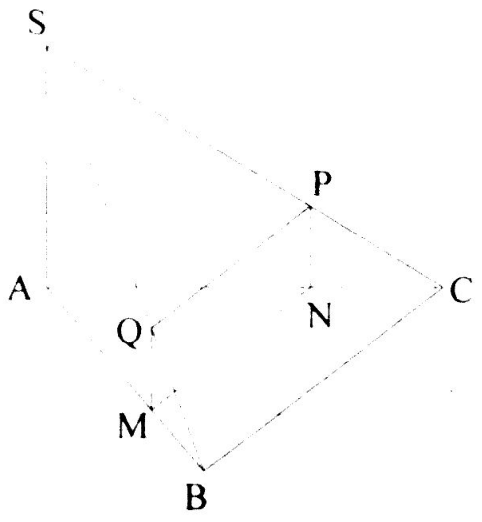
Vì $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp AB \Rightarrow SA // (P)$

$\Rightarrow MQ // PN // SA$

Vậy MNPQ là hình bình hành

Lại do $SA \perp BC$ nên $MQ \perp MN$

Vậy MNPQ là hình chữ nhật



Hình 129

b) Áp dụng định lí Talet ta có

$$\frac{MQ}{SA} = \frac{BM}{BA} = \frac{a-x}{a}$$

$$\Rightarrow MQ = \frac{a-x}{a}.SA = (a-x)\sqrt{3}$$

$$\frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB} = \frac{x}{a} \Rightarrow MN = \frac{x}{a}BC = x$$

$$\Rightarrow S(MNPQ) = \sqrt{3}\,x(a-x)$$

Vì $x + (a - x) = a$, nên S đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow x = a - x \Leftrightarrow x = \frac{a}{2}$

Khi đó giá trị lớn nhất của S là $\frac{\sqrt{3}a^2}{4}$

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng, mệnh đề nào sai?

(A) Một đường thẳng vuông góc với hai đường thẳng phân biệt thuộc một mặt phẳng thì nó vuông góc với mặt phẳng đó ☐ đúng, ☐ sai

(B) Nếu đường thẳng a song song với mp(P) và đường thẳng b vuông góc với mp(P) thì a vuông góc với b ☐ đúng, ☐ sai

(C) Nếu đường thẳng a song song với mp(P) và đường thẳng b vuông góc với a thì b vuông góc với (P) ☐ đúng, ☐ sai

(D) Nếu đường thẳng a song song với đường thẳng b và b song song với mp(P) thì a song song hoặc thuộc (P) ☐ đúng, ☐ sai

Câu 2: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng, mệnh đề nào sai?

(A) Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song nhau ☐ đúng, ☐ sai

(B) Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì song song nhau ☐ đúng, ☐ sai

(C) Mặt phẳng (P) và đường thẳng a không thuộc (P) cùng vuông góc với đường thẳng b thì song song nhau ☐ đúng, ☐ sai

Câu 3: Cho hình chóp S.ABCD trong đó ABCD là hình chữ nhật, SA ⊥ (ABCD). Trong các tam giác sau tam giác nào không phải là tam giác vuông?

(A) ΔSAB **(B)** ΔSBC **(C)** ΔSCD **(D)** ΔSBD

Câu 4: Cho tứ diện ABCD có AB ⊥ CD và AC ⊥ BD. H là hình chiếu vuông góc của A lên (BCD). Các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

(A) CD ⊥ (ABH) **(B)** AD ⊥ BC

(C) H là trực tâm tam giác BCD **(D)** Các khẳng định ở (A), (B), (C) đều sai

Câu 5: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi tâm O và SA ⊥ (ABCD). Chọn khẳng định sai

(A) SA ⊥ BD **(B)** SC ⊥ BD

(C) SO ⊥ BD **(D)** AD ⊥ SC

Câu 6: Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình thoi và SA = SC. Chọn khẳng định đúng

(A) AC ⊥ (SBD) **(B)** BD ⊥ (SAC)

(C) SO ⊥ (ABCD) **(D)** AB ⊥ (SAD)

Câu 7: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành, tam giác SAB vuông tại A, tam giác SCD vuông tại D. Chọn khẳng định sai

(A) AB ⊥ (SAD) **(B)** AC = BD

(C) SO ⊥ (ABCD) **(D)** ABCD là hình chữ nhật

Câu 8: Cho hình chóp S.ABCD trong đó ABCD là hình chữ nhật, SA ⊥ (ABCD). AE và AF là đường cao của tam giác SAB và SAD. Chọn khẳng định đúng?

(A) SC ⊥ (AED) **(B)** SC ⊥ (AFB)

(C) SC ⊥ (AEF) **(D)** SC ⊥ (AEC)

Câu 9: Cho hình chóp S.ABC thoả mãn SA = SB = SC. Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên (ABC). Chọn khẳng định đúng?

(A) H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC

(B) H là trọng tâm của tam giác ABC

(C) H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

(D) H là trực tâm của tam giác ABC

Câu 10: Cho hình chóp S.ABC thoả mãn SA = SB = SC, tam giác ABC vuông tại A. Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên mp(ABC). Chọn khẳng định sai?

(A) (SAH) ∩ (SBH) = SH **(B)** (SAH) ∩ (SCH) = SH

(C) (SBH) ∩ (SCH) = SH **(D)** AB ⊥ SH

Câu 11: Cho hình chóp S.ABC có $\angle BSC = 120^0$, $\angle CSA = 60^0$, $\angle ASB = 90^0$, SA = SB = SC. Gọi I là hình chiếu vuông góc của S lên mp(ABC). Chọn mệnh đề đúng

(A) I là trọng tâm của tam giác ABC **(B)** I là trung điểm của AB

(C) I là trung điểm của AC **(D)** I là trung điểm của BC

Câu 12: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác đều, SA $\perp$ (ABC). Gọi (P) là mặt phẳng qua B và vuông góc với SC. Thiết diện của (P) và hình chóp S.ABC là

(A) Hình thang vuông **(B)** Tam giác đều

(C) Tam giác vuông **(D)** Tam giác cân

Câu 13: Hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông. Cạnh bên SA vuông góc với đáy. Mặt phẳng qua A và vuông góc với SC cắt SB, SC, SD theo thứ tự tại H, M, K. Tìm mệnh đề sai

(A) AH $\perp$ SB **(B)** AK $\perp$ HK

(C) HK $\perp$ AM **(D)** BD // HK

Câu 14: Cho tứ diện đều ABCD cạnh 12. Gọi (P) là mặt phẳng qua B và vuông góc với AD. Thiết diện của (P) và hình chóp có diện tích bằng

(A) 40 **(B)** $36\sqrt{2}$ **(C)** $36\sqrt{3}$ **(D)** 36

Câu 15: Cho tứ diện đều ABCD cạnh a = 12. AP là đường cao của tam giác ACD. Mặt phẳng (P) qua B và vuông góc với AP. (P) cắt mặt (ACD) của tứ diện ABCD theo đoạn giao tuyến có độ dài

(A) 7 **(B)** 8 **(C)** 9 **(D)** 6

Câu 16: Cho hình chóp S.ABC, đáy ABC là tam giác vuông tại B. Cạnh bên SA vuông góc với đáy. Mặt phẳng (P) đi qua trung điểm M của AB và vuông góc với SB. (P) cắt AC, SC, SB lần lượt tại N, P, Q. Tứ giác MNPQ là hình gì?

(A) Hình bình hành **(B)** Hình chữ nhật

(C) Hình thang cân **(D)** Hình thang vuông

Câu 17: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác đều, O là trung điểm của đường cao AH của tam giác ABC. SO vuông góc với đáy. Gọi I là điểm tuỳ ý trên đoạn OH (không trùng với O, H). Mặt phẳng (P) qua I và vuông góc với OH. Thiết diện của (P) và hình chóp là hình gì?

(A) Tam giác vuông **(B)** Hình bình hành

(C) Hình thang cân **(D)** Hình thang vuông

Câu 18: Tam giác ABC có BC = 2a, đường cao AD = $a\sqrt{2}$. Trên đường thẳng vuông góc với (ABC) tại A, lấy điểm S sao cho SA = $a\sqrt{2}$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của SB và SC. Diện tích tam giác AEF bằng bao nhiêu?

(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}a^2$ **(B)** $\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$

(C) $\dfrac{\sqrt{3}}{6}a^2$ **(D)** $\dfrac{1}{2}a^2$

Câu 19: Cho hình chóp S.ABCD, với đáy ABCD là hình bình hành tâm O. AD, SA, AB vuông góc từng đôi. AD = 8, SA = 6. (P) là mặt phẳng qua trung điểm của AB và vuông góc với AB. Diện tích thiết diện của (P) với hình chóp bằng bao nhiêu?

(A) 18 **(B)** 16 **(C)** 20 **(D)** 17

Câu 20: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A, có đáy lớn AD = 8, BC = 6. SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và SA = 6. Gọi M là trung điểm cạnh AB. (P) là mặt phẳng qua M và vuông góc với AB. Thiết diện của (P) và hình chóp có diện tích bằng bao nhiêu?

(A) 10 **(B)** 15 **(C)** 16 **(D)** 20

Câu 21: Cho tứ diện SABC có hai mặt (ABC) và (SBC) là hai tam giác đều cạnh a, $SA = a\frac{\sqrt{3}}{2}$. M là điểm trên cạnh AB sao cho AM = b (0 < b < a). (P) là mặt phẳng qua M và vuông góc với BC. Thiết diện tạo bởi (P) và tứ diện SABC có diện tích bằng

(A) $\frac{3\sqrt{3}(a-b)^2}{4}$ **(B)** $\frac{3\sqrt{3}(a-b)^2}{8}$

(C) $\frac{3\sqrt{3}(a-b)^2}{16}$ **(D)** $\frac{\sqrt{3}(a-b)^2}{4}$

Câu 22: Cho hình tứ diện OABC có ba cạnh OA, OB, OC vuông góc từng đôi. Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên mp(ABC). Chọn khẳng định sai

(A) $OA \perp BC$ **(B)** H là trực tâm của tam giác ABC

(C) $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} + \frac{1}{OA^2}$ **(D)** $3OH^2 = AB^2 + AC^2 + BC^2$

Câu 23: Cho tứ diện đều ABCD. Gọi α là góc giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (BCD). Chọn khẳng định đúng

(A) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ **(B)** $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ **(C)** $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$ **(D)** $\cos\alpha = 0$

Câu 24: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a. SA vuông góc với mp(ABCD). $SA = a\sqrt{6}$. Gọi α là góc giữa SC và (ABCD). Chọn khẳng định đúng

(A) $\alpha = 45^0$ **(B)** $\alpha = 60^0$ **(C)** $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ **(D)** $\alpha = 30^0$

Câu 25: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là vuông cạnh a. SA vuông góc với mp(ABCD). $SA = a\sqrt{6}$. Gọi α là góc giữa SC và (SAB). Chọn khẳng định đúng

(A) $\tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{8}}$ **(B)** $\tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{6}}$ **(C)** $\tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{7}}$ **(D)** $\alpha = 30^0$

Câu 26: Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Gọi α là góc giữa AC_1 và mp(ABCD). Chọn khẳng định đúng

(A) $\tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ **(B)** $\alpha = 30^0$ **(C)** $\alpha = 45^0$ **(D)** $\tan\alpha = \frac{2}{\sqrt{3}}$

Câu 27 Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Gọi α là góc giữa AC_1 và mp(A_1BCD_1). Chọn khẳng định đúng

(A) $\tan\alpha = \sqrt{2}$ **(B)** $\alpha = 30^0$ **(C)** $\alpha = 45^0$ **(D)** $\tan\alpha = \frac{2}{\sqrt{3}}$

Câu 28: Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình vuông, mặt bên SAB là tam giác đều có đường cao SH vuông góc với đáy (ABCD). Gọi α là góc giữa BD và (SAD). Chọn khẳng định đúng

(A) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ **(B)** $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ **(C)** $\alpha = 60^0$ **(D)** $\alpha = 30^0$

Câu 29: Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Đường thẳng AC_1 vuông góc với mặt phẳng nào dưới đây?

(A) (A_1B_1CD) **(B)** (A_1CD_1) **(C)** (A_1DC_1) **(D)** (A_1BD)

Câu 30: Cho hình tứ diện S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, SA $\perp$ (ABC) và SA = a. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua S và vuông góc với BC. Diện tích thiết diện của (P) và hình chóp bằng

(A) $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ **(B)** $\frac{a^2}{2}$ **(C)** $\frac{a^2}{6}$ **(D)** a^2

Câu 31: Cho hình tứ diện S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, SA $\perp$ (ABC) và SA $= a\frac{\sqrt{3}}{2}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với trung tuyến SM của tam giác SBC. Thiết diện của (P) và hình chóp có diện tích bằng bao nhiêu?

(A) $\frac{a^2\sqrt{6}}{16}$ **(B)** $\frac{a^2\sqrt{6}}{8}$ **(C)** $\frac{a^2}{6}$ **(D)** a^2

TRẢ LỜI

Câu 1:

(A) Khẳng định sai. Phát biểu đúng như sau: Một đường thẳng vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau thuộc một mặt phẳng thì nó vuông góc với mặt phẳng đó

(B) Khẳng định đúng

(C) Khẳng định sai.

(D) Khẳng định đúng

Câu 2:

Khẳng định (A) đúng. Khẳng định (B) sai. Khẳng định (C) đúng

Câu 3: (Bạn đọc tự vẽ hình)

SA $\perp$(ABCD), (ABCD) $\supset$ AB $\Rightarrow$ SA $\perp$ AB. Vậy ΔSAB vuông tại A

Nhận xét: AB là hình chiếu vuông góc của SB lên (ABCD), mà BC $\perp$ AB, theo định lí ba đường vuông góc BC $\perp$ SB, vậy ΔSBC vuông tại B

Chứng minh tương tự ta có ΔSCD vuông tại D

ĐS: (D)

Câu 4: (xem Hình 130)

Ta chứng minh khẳng định (A) đúng

Vì $AH \perp (BCD) \Rightarrow CD \perp AH$

Mặt khác $CD \perp AB$

Vậy $CD \perp (ABH)$ (1)

Vậy khẳng định (A) đúng

Cũng từ (1) ta có $CD \perp BH$

Chứng minh tương tự $BD \perp CH$

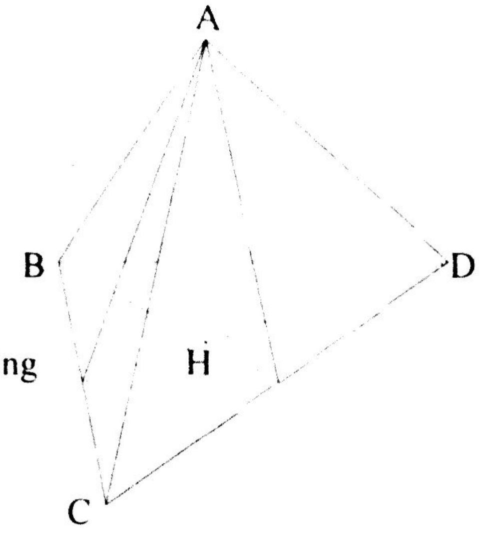
Vậy H là trực tâm của BCD, khẳng định (C) đúng

Ta có: $BC \perp DH$, $BC \perp AH \Rightarrow BC \perp (ADH)$

$\Rightarrow BC \perp AD$

Khẳng định (C) đúng

ĐS: (D)



Hình 130

Chú ý: Với câu trắc nghiệm này, ta chỉ cần khảo sát một trong ba khẳng địnl (hoặc (A), hoặc (B), hoặc (C)). Nếu khẳng định đang xét là đúng thì ta chọn (D) nếu khẳng định đang xét là sai, thì ta chọn khẳng định này

Câu 5: (xem Hình 131)

(A) $SA \perp (ABCD)$, $BD \subset (ABCD)$

$\Rightarrow SA \perp BD$

Khẳng định (A) đúng

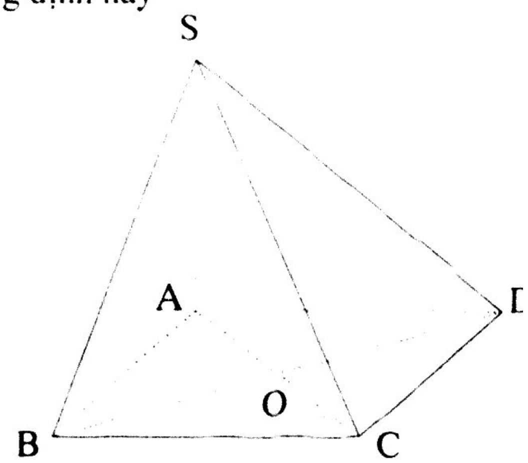
(B) Hình chiếu vuông góc của SC lên mp(ABCD) là AC. Theo tính chất của hình thoi thì $BD \perp AC$

Theo định lí ba đường vuông góc $SC \perp BD$

Khẳng định (B) đúng

(C) Theo định lí ba đường vuông góc, khẳng định (C) đúng

ĐS: (D)



Hình 131

Câu 6: (xem hình 132)

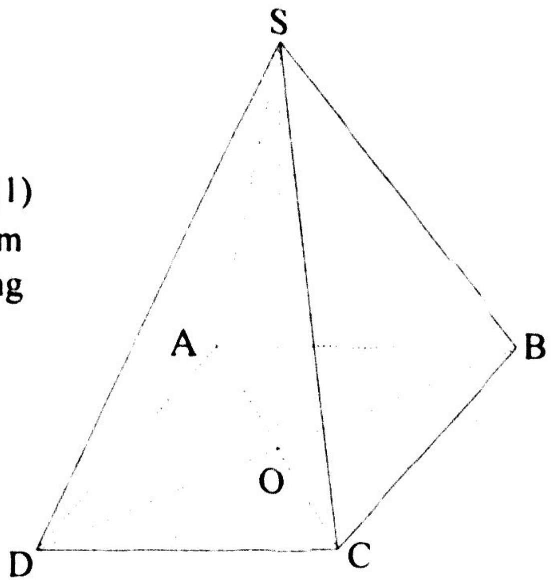
Ta chứng minh khẳng định (A) đúng.

Theo tính chất của hình thoi: $AC \perp BD$ (1)

Vì SA = SC nên tam giác SAC cân. Tam giác cân SAC có trung tuyến SO còn là đường cao, vậy $AC \perp SO$ (2)

(1) và (2) cho ta $AC \perp (SBD)$

ĐS: (A)



Hình 131

Câu 7: (xem Hình 133)

(A) $CD \perp SD$ và $CD // AB \Rightarrow AB \perp SD$ (1)

Theo giả thiết $AB \perp SA$ (2)

(1) và (2) $\Rightarrow AB \perp (SAD)$. Khẳng định (A) đúng

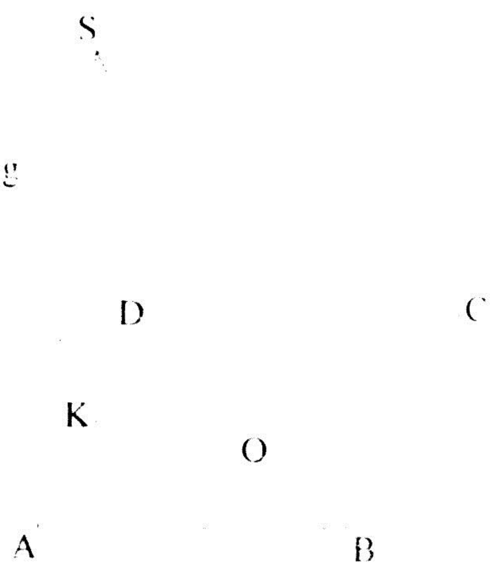
(B) Theo câu a, $AB \perp (SAD) \Rightarrow AB \perp AD$

$\Rightarrow$ Hình bình hành ABCD là hình chữ nhật

$\Rightarrow AC = BD$. Khẳng định (B) đúng

(C) Khẳng định (C) là sai. Thật vậy, gọi K là hình chiếu vuông góc của S lên AD ta dễ dàng chứng minh rằng $SK \perp (ABCD)$. Để $SO \perp (ABCD)$ thì $O \equiv K$, điều này không thể xảy ra

ĐS: (C)



Hình 133

Câu 8: (xem Hình 134)

Ta chứng minh $SC \perp (AEF)$

Theo giả thiết $SA \perp (ABCD)$, $(ABCD) \supset BC$

$\Rightarrow BC \perp SA$ (1)

Lại do $BC \perp AB$ (2)

(1) và (2) cho ta $BC \perp (SAB)$, và vì vậy

$BC \perp AE$ (vì AE thuộc (SAB)) (3)

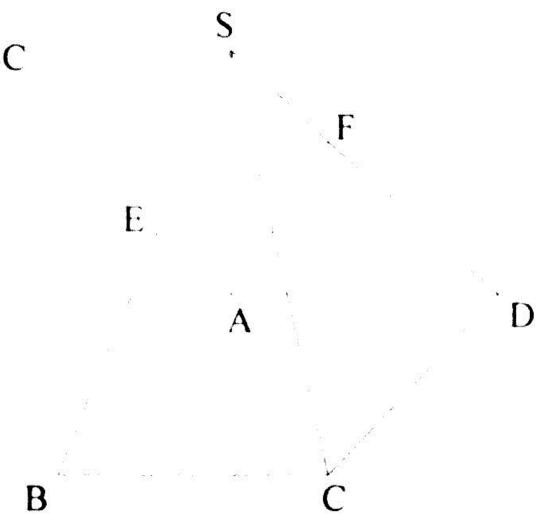
Theo giả thiết $AE \perp SB$ (4)

(3) và (4) $\Rightarrow AE \perp (SBC) \Rightarrow SC \perp AE$ (5)

Chứng minh tương tự ta có $SC \perp AF$ (6)

(5) và (6) $\Rightarrow SC \perp (AEF)$

ĐS: (C)



Hình 134

Câu 9: (xem Hình 135)

Nhận xét rằng: Hình chiếu của SA, SB, SC lên mp(ABC) là HA, HB, HC

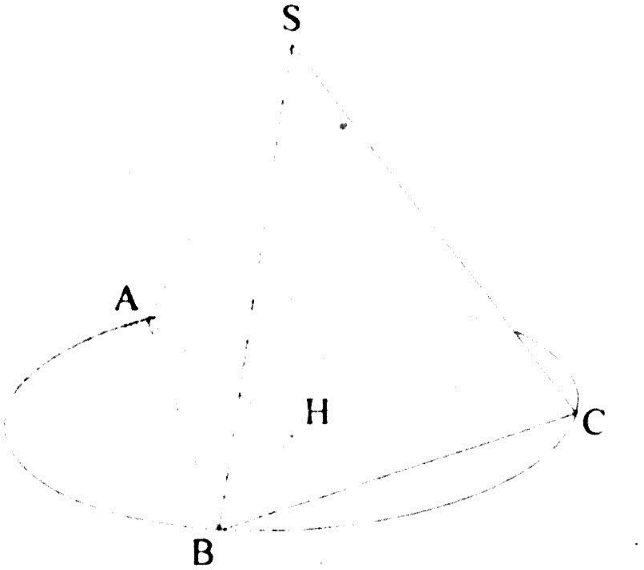
Theo giả thiết:

$SA = SB = SC$

Vì vậy $HA = HB = HC$

H cách đều ABC, vậy H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

ĐS: (C)



Hình 133

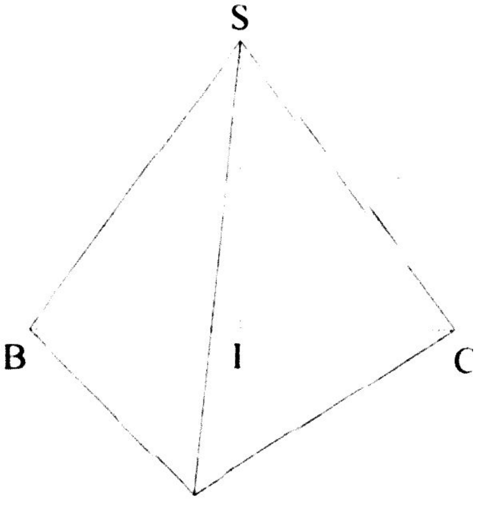
Câu 10:

Theo câu trên thì H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông ABC, vậy H l. trung điểm của tam giác ABC.

Vậy khẳng định (C) là sai. Mặt phẳng (SBH) và (SCH) trùng nhau

ĐS: (C)

Câu 11: (xem Hình 136)



Hình 136

Vì SA = SB = SC nên I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

Muốn xem I là điểm đặc biệt gì của tam giác ABC ta xem hình dạng của ABC bằng cách tính các cạnh

Gọi a = SA = SB = SC. Ta có:

Tam giác SAB vuông cân tại S cho ta $AB = a\sqrt{2}$

Tam giác SAC cân và có góc ở đỉnh bằng 60^0 nên là tam giác đều, vậy AC = a

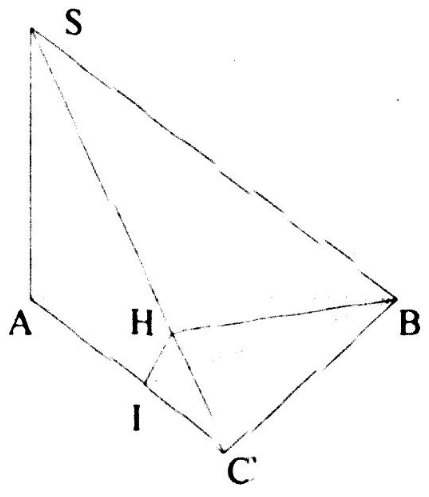
Áp dụng định lí Côsin cho tam giác SBC ta có:

$$BC^2 = SB^2 + SC^2 - 2SB.SC.\cos 120^0 = 3a^2$$

Vì $BC^2 = AB^2 + AC^2$ nên tam giác ABC vuông tại A và do đó I là trung điểm của BC

ĐS: (D)

Câu 12: (xem Hình 137)



Hình 137

Gọi I là trung điểm AC và gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên SC, khi đó ta có:

$BI \perp AC$ (do ABC là tam giác đều),

$BI \perp SA$ (do $SA \perp (ABC)$)

$\Rightarrow BI \perp (SAC) \Rightarrow BI \perp SC$

Mà $IH \perp SC$ (theo cách lấy điểm H)

$\Rightarrow SC \perp (BHI)$. Do vậy (P) là (BHI) và thiết diện cần tìm là tam giác BHI

Rõ ràng BHI vuông tại I (do $BI \perp (SAC)$)

ĐS: (C)

Câu 13: (xem Hình 138)

$BC \perp (SAB) \Rightarrow HA \perp BC$ (1)

$SC \perp (AHM) \Rightarrow HA \perp SC$ (2)

(1) và (2) $\Rightarrow HA \perp (SBC) \Rightarrow HA \perp SB$

Khẳng định (A) đúng

$BD \perp AC$ (tính chất của hình vuông) nên theo định lí ba đường vuông góc $BD \perp SC$

Mặt khác $(AHM) \perp SC \Rightarrow BD \,//\, (AHM)$

Lại do (SBD) $\cap$ (AHM) = HK

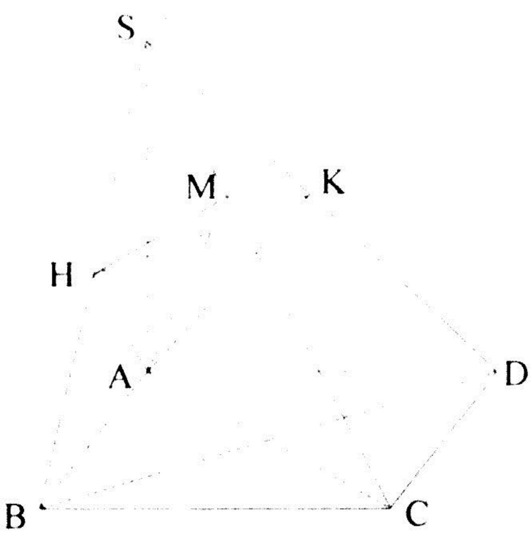
$\Rightarrow$ HK // BD

Khẳng định (D) đúng

Mặt khác BD $\perp$ SC $\Rightarrow$ HK $\perp$ AM

Khẳng định (C) đúng

ĐS: (B)



Hình 138

Câu 14: (xem Hình 139)

Gọi M là trung điểm của AD, ta có BM $\perp$ AD, CM $\perp$ AD (trung tuyến của tam giác đều còn là đường cao) vì vậy AD $\perp$ (BCM)

Do đó thiết diện của (P) và hình tứ diện là tam giác BCM

$$\text{Ta có } BM = CM = 12\frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$$

Gọi K là trung điểm của BC, ta có MK $\perp$ BC.

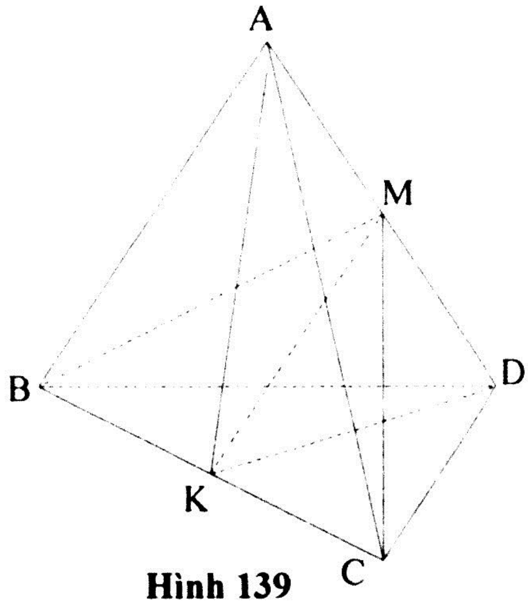
Theo định lí Pitagor

$$MK = \sqrt{MC^2 - CK^2}$$

$$= \sqrt{108 - 36} = 6\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow S(BCM) = \frac{1}{2}BC.MK = 36\sqrt{2}$$

ĐS: (B)



Hình 139

Câu 15 (xem Hình 140)

Gọi H là hình chiếu vuông góc của B lên (ACD), ta có H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ACD

Qua H dựng đường thẳng song song với CD cắt SC, SD lần lượt tại M, N.

Ta có thiết diện của (P) và hình chóp là tam giác BMN

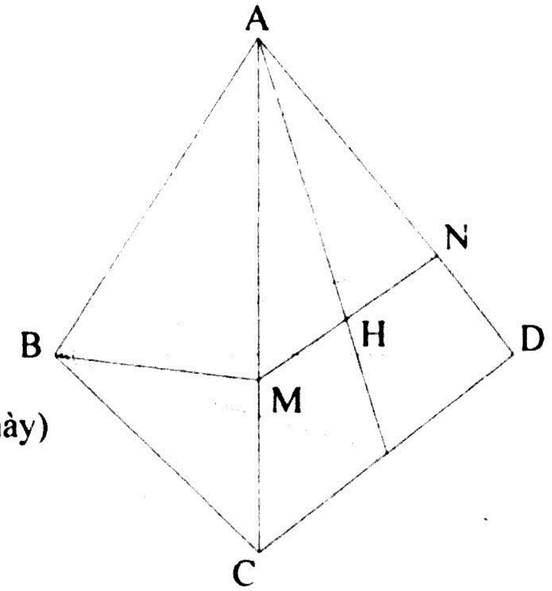
(Bạn đọc hãy chứng minh chi tiết kết luận này)

Theo định lí Talet ta có

$$\frac{MN}{CD} = \frac{AH}{AP} = \frac{2}{3}$$

$\Rightarrow$ MN = 8

ĐS: (B)



Hình 140

Câu 16: (xem Hình 141)

AB là hình chiếu vuông góc của SB lên (ABC)

Vì $BC \perp AB \Rightarrow BC \perp SB$

$\Rightarrow BC \,//\, (P)$ (vì cùng vuông góc với SB)

$\Rightarrow MN \,//\, BC \,//\, PQ$

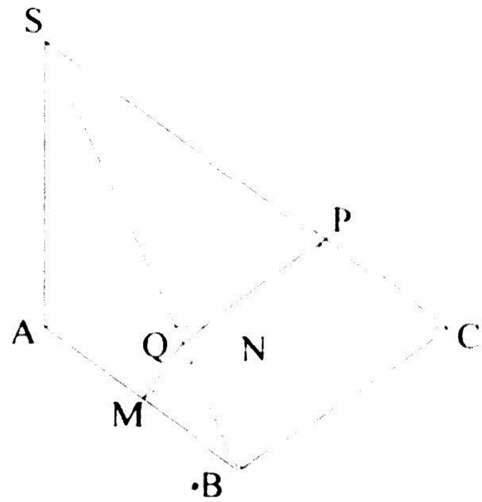
Vì $BC \perp SB$, $BC \perp AB \Rightarrow BC \perp (SAB)$

$\Rightarrow PQ \perp (SAB)$ (do $PQ \,//\, BC$)

$\Rightarrow PQ \perp MQ$

Vậy MNPQ là hình thang vuông

ĐS: (D)



Hình 141

Câu 17: (xem Hình 142)

$BC \perp OH$, $(P) \perp OH \Rightarrow (P) \,//\, BC$

$SO \perp OH$, $(P) \perp OH \Rightarrow (P) \,//\, SO$

$(P) \cap (SBC) = PQ \Rightarrow PQ \,//\, BC$

$(P) \cap (ABC) = MN \Rightarrow MN \,//\, BC$

$\Rightarrow MN \,//\, PQ$

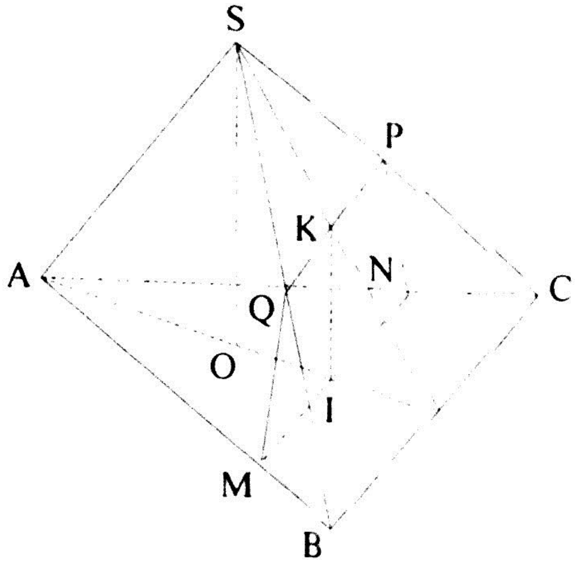
Vậy MNPQ là hình thang

Do ABC là tam giác đều nên I là trung điểm của MN

PQ cắt SH tại K, SBC là tam giác cân nên K là trung điểm của PQ. Lại do $IK \,//\, SO$ nên $IK \perp MN$

Vậy MNPQ là hình thang cân

ĐS: (C)



Hình 142

Câu 18: (xem Hình 143)

$BC \perp AD$, $BC \perp SA$ (do $SA \perp (ABC)$)

$\Rightarrow BC \perp (SAD)$

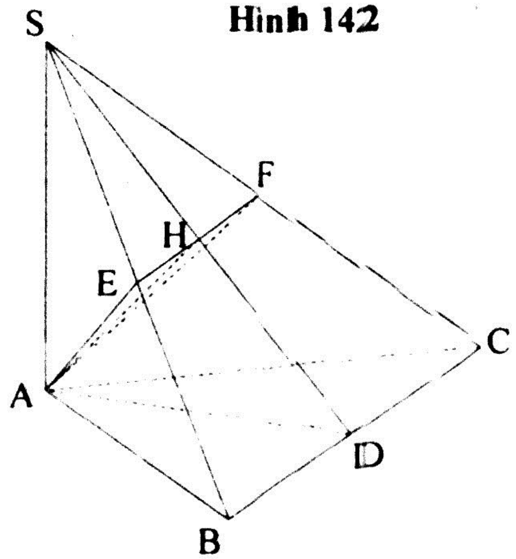
EF // BC (đường trung bình của tam giác)

$\Rightarrow EF \perp (SAD) \Rightarrow EF \perp AH$

$AH = \frac{1}{2} SD = a$; $EF = a$

$\Rightarrow S(AEF) = \frac{1}{2} EF.AH = \frac{1}{2} a^2$

ĐS: (D)



Hình 143

Câu 19: (xem Hình 144)

Gọi N, P, Q lần lượt là giao điểm của (P) với SB, SC, CD.

Do $(SAD) \perp AB \Rightarrow (P) \,//\, (SAD) \Rightarrow MN \,//\, SA$

Do đó MN là đường trung bình của tam giác SAB nên MN = 3

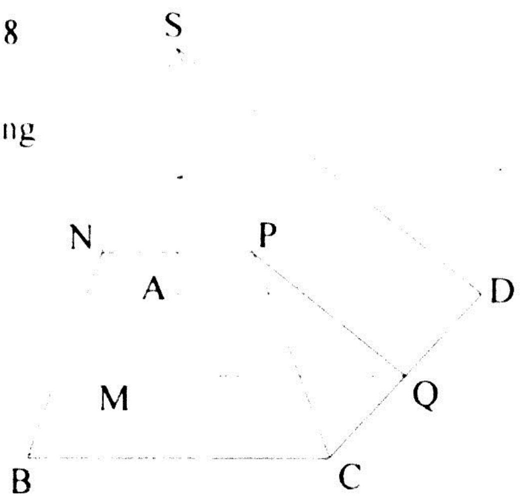
Cũng do (P) // (SAD) $\Rightarrow$ MQ // AD $\Rightarrow$ MQ = 8

Do đó NP // MQ và NP = 4

Thiết diện của (P) và hình chóp là hình thang vuông tại M và N: MNPQ

Vì vậy: $S(MNPQ) = MN.\dfrac{NP + MQ}{2}$

$= 3.6 = 18$



Hình 144

ĐS: (A)

Câu 20: (xem Hình 145)

Gọi giao điểm của (P) với SB, SC, CD lần lượt là N, P, Q

$AD \perp AB$ (hình thang ABCD vuông),

$AB \perp SA$ (do $SA \perp (ABCD)$)

$\Rightarrow AB \perp (SAD)$

Vậy (P) // (SAD), nên:

MN // SA; MQ // AD // BC và vì vậy MQ // NP

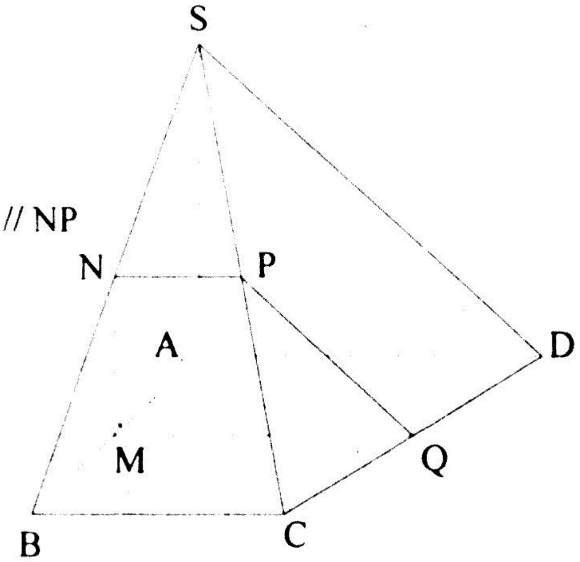
Vậy MNPQ là hình thang vuông tại M

và $MN = \dfrac{SA}{2} = 3$; $NP = \dfrac{BC}{2} = 3$

$MQ = \dfrac{BC + AD}{2} = 7$

(tính chất đường trung bình)

Vậy $S(MPQ) = MN.\dfrac{NP + MQ}{2} = 3.5 = 15.$



Hình 145

ĐS: (E)

Câu 21: (xem Hình 146)

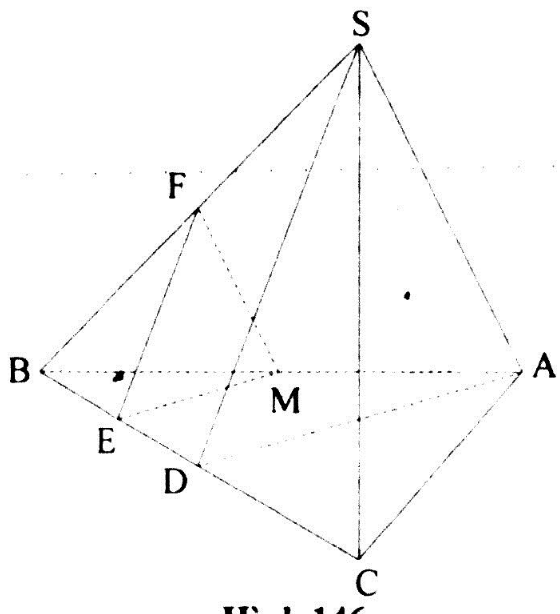
Gọi D là trung điểm BC, dễ dàng chứng minh được $(SAD) \perp BC \Rightarrow (P) // (SAD)$

$\Rightarrow$ Thiết diện là tam giác MFE đồng dạng với tam giác ASD

Dễ chứng minh được rằng ASD là tam giác đều cạnh $a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow S(SAD) = \dfrac{3\sqrt{3}a^2}{16}$

$\Rightarrow \dfrac{S(MFE)}{S(SAD)} = (\dfrac{ME}{AD})^2 = (\dfrac{a-b}{a})^2$



Hình 146

$$\Rightarrow S(MFE) = (\frac{a-b}{a})^2 \frac{3\sqrt{3}a^2}{16}$$

ĐS: (C)

Câu 22: (xem Hình 147)

$OA \perp OB$, $OA \perp OC \Rightarrow OA \perp (OBC)$ (1)

Vì $BC \subset (OBC)$, (1) $\Rightarrow OA \perp BC$ (2)

Khẳng định (A) đúng

Lại do $OH \perp (ABC) \Rightarrow OH \perp BC$ (3)

(2) và (3) $\Rightarrow BC \perp (OAH) \Rightarrow BC \perp AH$

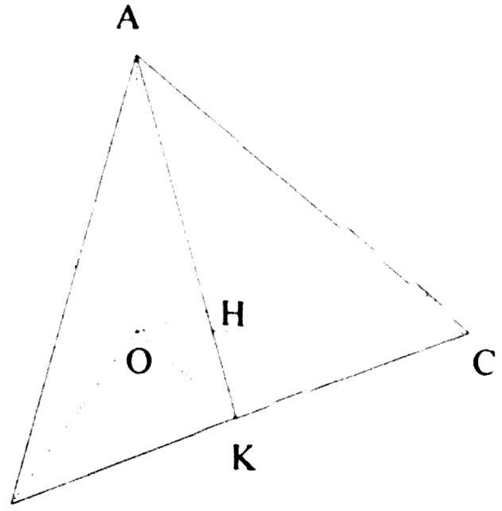
Chứng minh tương tự ta có: $AB \perp CH$

Vậy H là trực tâm của tam giác ABC

Khẳng định (B) đúng

Vấn đề còn lại là tính OH

Tam giác vuông OBC có OK là đường cao



Hình 147

ta có: $\frac{1}{OK^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$

Lại do OH là đường cao của tam giác vuông OAK, ta có:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OK^2} + \frac{1}{OA^2}$$

$$= \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} + \frac{1}{OA^2}$$

ĐS: (D)

Câu 23: (xem Hình 148)

Gọi H là hình chiếu của A lên mặt phẳng (BCD).

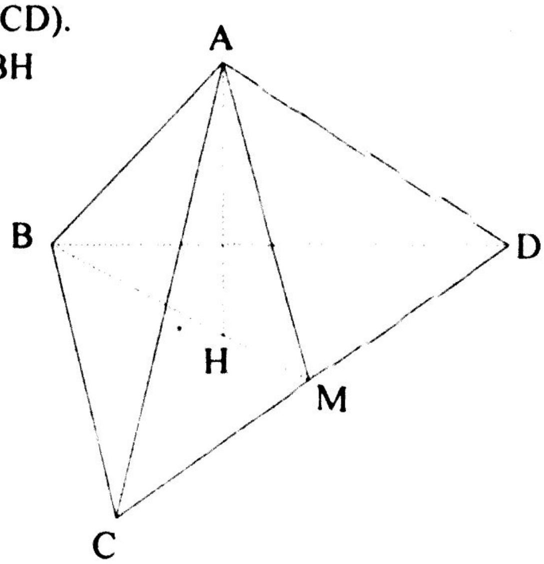
Góc giữa AB và (BCD) là góc giữa AB và BH

Vì $AB = AC = AD$ nên $HD = HB = HC$ và vì vậy H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều BCD nên cũng là trọng tâm của tam giác BCD

$$\Rightarrow BH = \frac{2}{3}BM = \frac{2}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}.a = \frac{\sqrt{3}}{3}a$$

Tam giác ABH vuông tại H, ta có:

$$\cos\alpha = \frac{BH}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



Hình 148

ĐS: (B)

Câu 24: (xem Hình 149)

Vì $SA \perp (ABCD)$, nên $\alpha = \widehat{SCA}$

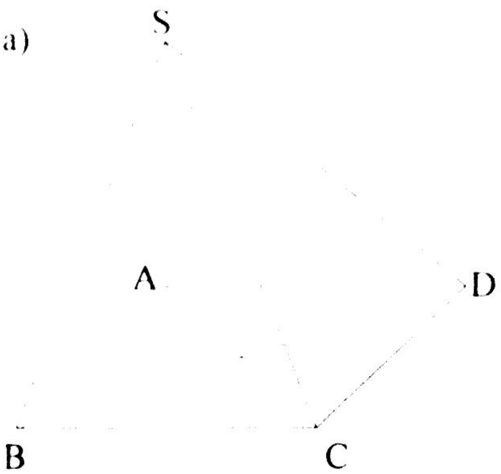
$AC = a\sqrt{2}$ (đường chéo của hình vuông cạnh a)

Tam giác SAC vuông tại A ta có:

$$\tan\alpha = \frac{SA}{AC} = \frac{a\sqrt{6}}{a\sqrt{2}} = \sqrt{3}$$

$\Rightarrow \alpha = 60^0$

ĐS: (B)



Hình 149

Câu 25: (xem Hình 149)

$BC \perp AB$ (giả thiết) (1)

$SA \perp (ABCD)$ (giả thiết) $\Rightarrow BC \perp SA$ (2)

(1) và (2) $\Rightarrow BC \perp (SAB)$

Vậy góc giữa SC và (SAB) là $\widehat{BSC}$

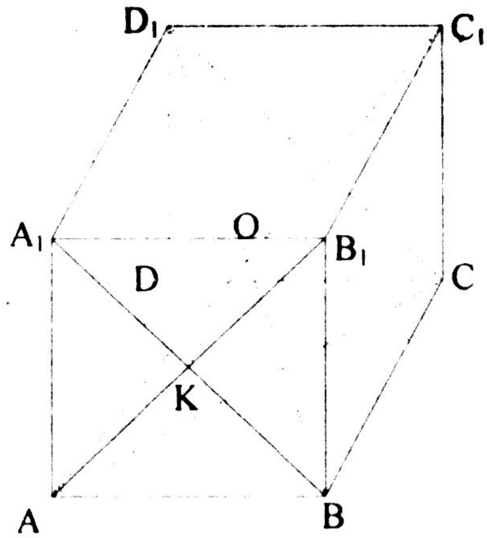
Tam giác SAB vuông tại A, theo định lí Pitagor:

$SB^2 = SA^2 + AB^2 = 6a^2 + a^2 = 7a^2$

Tam giác SBC vuông tại B ta có:

$$\tan\alpha = \tan\widehat{BSC} = \frac{BC}{SB} = \frac{1}{\sqrt{7}}$$

ĐS: (C)



Hình 150

Câu 26: (xem Hình 150)

Vì $CC_1 \perp (ABCD)$, nên góc giữa AC_1 và (ABCD) là $\widehat{CAC_1}$

Ta có

$AC = a\sqrt{2}$. Tam giác ACC_1 vuông tại C ta có:

$$\tan\alpha = \tan\widehat{CAC_1} = \frac{CC_1}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ĐS: (A)

Câu 27:

Vì $A_1D_1 \perp (ABB_1A_1) \Rightarrow A_1D_1 \perp AB_1$

Mặt khác $AB_1 \perp A_1B$ (tính chất của hình vuông)

$\Rightarrow AB_1 \perp (A_1BCD_1)$

Vậy góc giữa AC_1 và mp(A_1BCD_1) là góc giữa AC_1 và OK và bằng góc AC_1B_1

Tam giác C_1AB_1 vuông tại B_1. Vậy:

$$\tan\alpha = \frac{AB_1}{C_1B_1} = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}$$

ĐS: (A)

Câu 28: (xem Hình 151)

Kẻ đường cao BK của tam giác SAB ta có $BK \perp SA$ (*)

Vì $SH \perp (ABCD)$, $(ABCD) \supset AD$

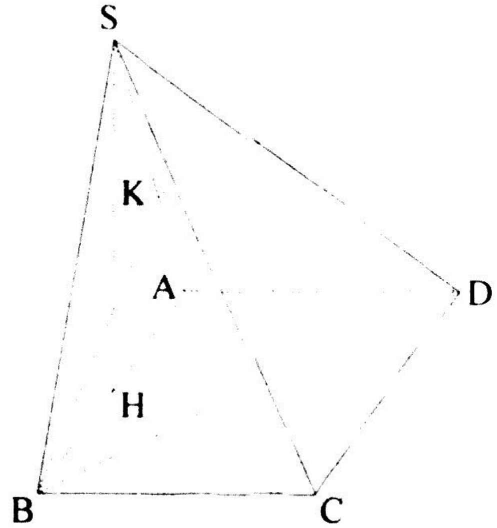
$\Rightarrow AD \perp SH$ (1)

Mặt khác $AD \perp AB$ (2)

(1) và (2) $\Rightarrow AD \perp (SAB) \Rightarrow AD \perp BK$ (3)

(*) và (3) $\Rightarrow BK \perp (SAD)$

Vậy góc giữa BD và (SAD) là góc $\widehat{KDB}$



Hình 151

Ta có: $BD = a\sqrt{2}$ (đường chéo của hình vuông cạnh a)

$$BK = a\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ (đường cao của tam giác đều cạnh a)}$$

Tam giác BKD vuông tại K ta có:

$$\sin\alpha = \sin\widehat{KDB} = \frac{BK}{BD} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

ĐS: (B)

Câu 29: Ta chứng minh câu (D) đúng

Hình chiếu của AC_1 lên (ABCD) là AC.

BD thuộc (ABCD) và $BD \perp AC$.

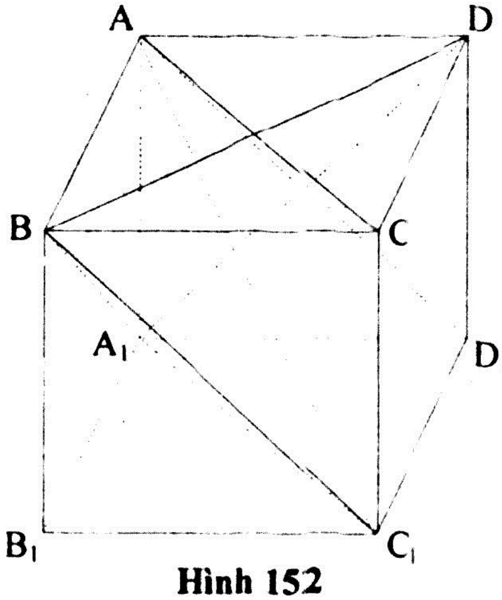
Theo định lí ba đường vuông góc ta có $BD \perp AC_1$ (1) (xem Hình 152)

Tương tự, hình chiếu của AC_1 lên (ADA_1D_1) là AD_1. A_1D thuộc $(AA_1D\,D_1)$ và $A_1D \perp AD_1$, theo định lí ba đường vuông góc ta có

$A_1D \perp AC_1$ (2)

(1) và (2) $\Rightarrow AC_1 \perp (A_1BD)$

ĐS: (D)



Hình 152

Câu 30: Gọi M là trung điểm của BC (xem Hình 153), ta có

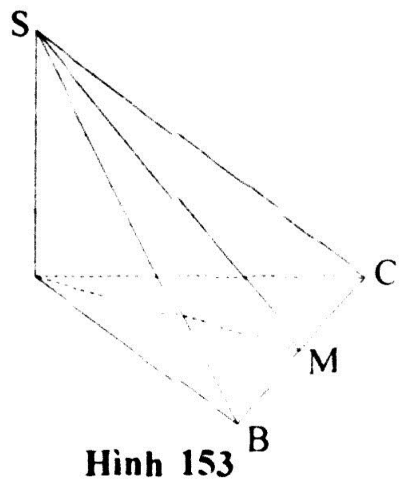
$BC \perp AM$ (1)

$SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$ (2)

(1) và (2) $\Rightarrow BC \perp (SAM)$

Vậy (P) là mặt phẳng (SAM) và thiết diện cần tìm là tam giác vuông SAM

Ta có $SA = a$, $AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, vậy:



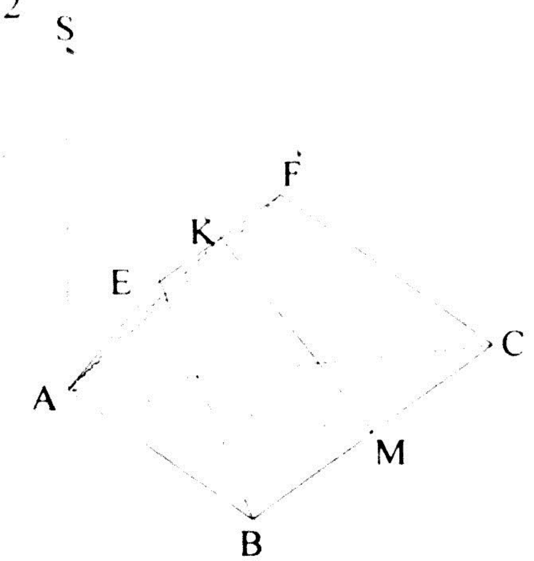
Hình 153

$$S(SAM) = \frac{1}{2}SA.AM = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

ĐS: (A)

Câu 31:

Gọi M là trung điểm của BC. Ta có $AM = a\frac{\sqrt{3}}{2}$.



Hình 154

Tam giác SAM cân tại A. Gọi K là trung điểm của SM ta có $AK \perp SM$ (xem Hình 154)

Từ K vẽ đường thẳng song song với BC cắt SB, SC lần lượt tại E, F

Ta dễ dàng chứng minh được $SM \perp (AEF)$

Vậy (P) là mặt phẳng (AEF), và thiết diện là tam giác AEF

Dễ dàng chứng minh được tam giác AEF cân tại A có đường cao AK

Tam giác SAM vuông cân tại A, ta có:

$$SM = \sqrt{SA^2 + AM^2} = a\frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\Rightarrow AK = a\frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$EF = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}a$$

Vậy $S(AEF) = \frac{1}{2}AK.\,EF = \frac{a^2\sqrt{6}}{16}$

ĐS: (A)

§4. HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

TÓM TẮT LÍ THUYẾT

I. Góc giữa hai mặt phẳng:

1. Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó

Nếu hai mặt phẳng song song hoặc trùng nhau, ta nói góc giữa chúng bằng 0^0

2. Cách xác định góc giữa hai mặt phẳng: Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến c. Từ điểm I thuộc c ta vẽ đường thẳng a thuộc (P) và vuông góc với c và vẽ đường thẳng b thuộc (Q) và vuông góc với c. Khi đó góc giữa a và b là góc giữa (P) và (Q)

3. Gọi S là diện tích đa giác nằm trong (P), S' là diện tích hình chiếu của đa giác đó lên (Q), φ là góc giữa (P) và (Q). Ta có:

$$S' = S.\cos\varphi$$

II. Hai mặt phẳng vuông góc:

1. Định nghĩa: Hai mặt phẳng được gọi là vuông góc nếu góc giữa hai mặt phẳng đó là góc vuông

2. Tính chất:

a) Điều kiện cần và đủ để hai mặt phẳng vuông góc nhau là mặt phẳng này chứa đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia

b) Nếu hai mặt phẳng vuông góc nhau thì đường thẳng nào nằm trong một mặt phẳng và vuông góc với giao tuyến thì vuông góc với mặt phẳng còn lại

c) Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc nhau. Nếu từ một điểm thuộc mặt phẳng (P) ta vẽ đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (Q) thì đường thẳng đó thuộc mặt phẳng (P)

CÁC DẠNG TOÁN CƠ BẢN

I. Dạng toán 1: Tính góc giữa hai mặt phẳng

Phương pháp: Dựng góc giữa hai mặt phẳng (xem phần lí thuyết), qui về tính toán trong mặt phẳng. Chú ý định lí sin, cosin, tỉ số lượng giác ...

VD1: Cho hình chóp tam giác đều S.ABC với SA = 2AB.

Tính góc giữa (SAB) và (ABC)

Giải

Gọi M là trung điểm của AB. Ta có: (xem Hình 155)

$SM \perp AB$ (do tam giác SAB cân tại S),

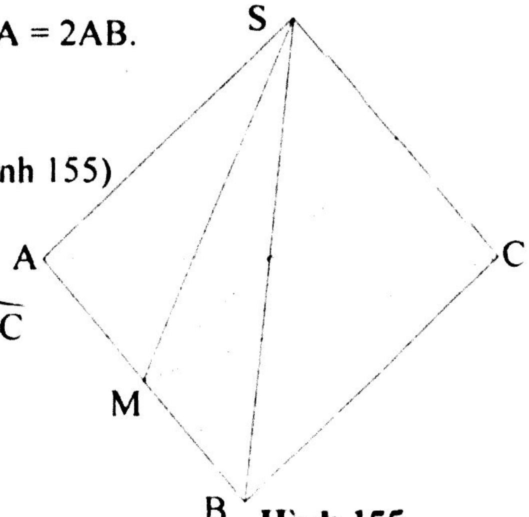
$CM \perp AB$ (do tam giác ABC đều)

Vậy góc giữa (SAB) và (ABC) bằng góc $\widehat{SMC}$

Đặt AB = 2a

Tam giác SMA vuông tại M, theo định lí Pitagor ta có:

$$SM^2 = SA^2 - AM^2 = 16a^2 - a^2 = 15a^2$$



Hình 155

$CM = a\sqrt{3}$ (đường cao của tam giác đều cạnh 2a)

$$\cos\alpha = \frac{SM^2 + MC^2 - SC^2}{2.SM.MC} = \frac{15a^2 + 3a^2 - 16a^2}{2.a\sqrt{15}a.\sqrt{3}} = \frac{1}{3\sqrt{5}}$$

VD2: Cho tứ diện ABCD có BCD là tam giác đều cạnh a. AB vuông góc với mặt phẳng (BCD) và AB = 2a. Tính góc giữa hai mặt phẳng (BAC) và (DAC)

Giải

Gọi I là trung điểm của BC (xem Hình 156)

Ta có: $DI \perp BC$ và $(BCD) \perp (ABC)$

Nên: $DI \perp (ABC)$

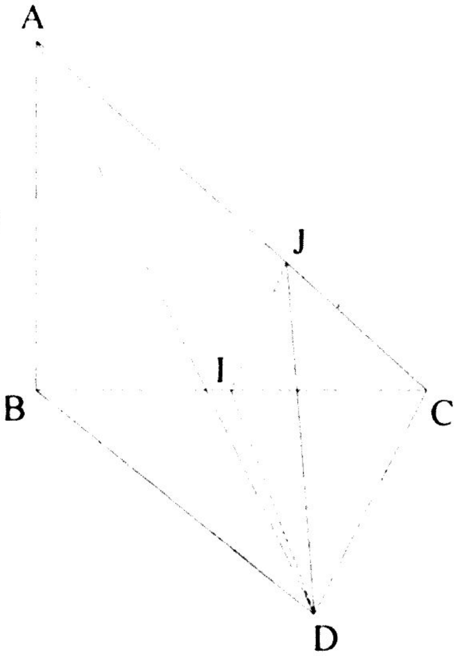
Vì vậy: $DI \perp AC$ (1)

Gọi J là hình chiếu vuông góc của I lên AC, ta có

$AC \perp IJ$ (2)

(1) và (2) $\Rightarrow AC \perp (DIJ) \Rightarrow AC \perp DJ$

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (BAC) và (DAC) là góc $\widehat{IJD}$



Hình 156

Ta có: $\sin\widehat{ACB} = \dfrac{2a}{a\sqrt{5}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

$J = IC.\sin\widehat{ACB} = \dfrac{a}{2}.\dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{a}{\sqrt{5}}$

$\Rightarrow \tan\widehat{IJD} = \dfrac{DI}{JI} = \dfrac{a\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{a}{\sqrt{5}}} = \dfrac{\sqrt{15}}{2}$

II. Dạng toán 2: Chứng minh hai mặt phẳng vuông góc

Phương pháp: Để chứng minh hai mặt phẳng vuông góc có thể sử dụng hai cách sau

- Chứng minh trong mặt phẳng này chứa đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia
- Chứng minh góc của chúng bằng 90^0

VD1: Cho hình tứ diện ABCD có hai mặt (ABC) và (ABD) cùng vuông góc với (DBC). Gọi BE là đường cao của tam giác BCD.

Chứng minh $(ABE) \perp (ADC)$

Giải

Ta có: $(ABC) \perp (DBC)$, $(ABD) \perp (DBC)$,

$(ABC) \cap (ABD) = AB$

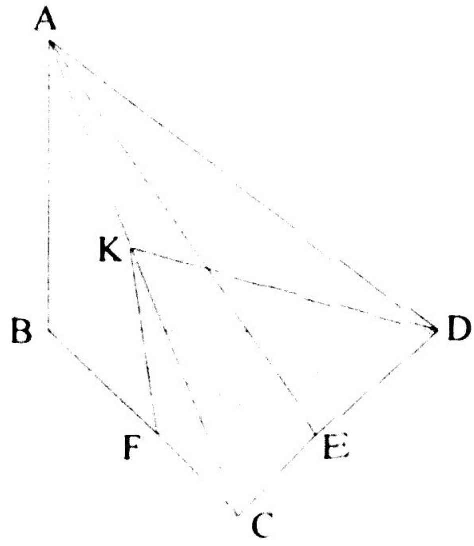
$\Rightarrow AB \perp (DBC) \Rightarrow AB \perp CD$ (xem Hình 157)

Mặt khác BE $\perp$ CD

$\Rightarrow$ CD $\perp$ (ABE)

Lại do (ADC) $\supset$ CD

Nên (ABE) $\perp$ (ADC)



Hình 157

VD2: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật. SA vuông góc với (ABCD). Gọi B_1 và D_1 là hình chiếu của A lên SB, SD. Chứng minh (AB_1D_1) vuông góc với (SBC) và (SCD)

Giải

BC $\perp$ SA (do SA $\perp$ (ABCD))

Và: BC $\perp$ AB

$\Rightarrow$ BC $\perp$ (SAB)

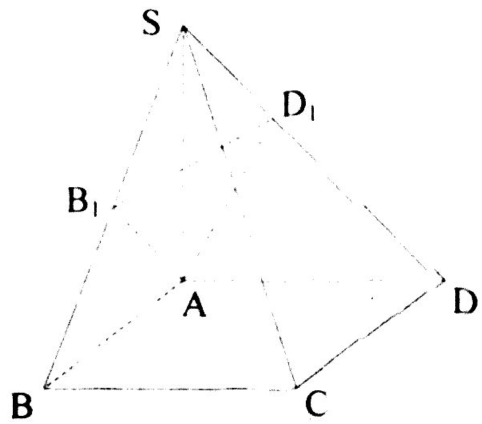
$\Rightarrow$ BC $\perp$ AB_1

Lại theo giả thiết: $AB_1 \perp SB$

Nên: $AB_1 \perp (SBC)$

Vì vậy $(AB_1D_1) \perp (SBC)$

Chứng minh tương tự ta cũng có $(AB_1D_1) \perp (SCD)$



Hình 158

III. Dạng toán 3: Thiết diện vuông góc với một mặt phẳng

> ***Phương pháp:*** Trong phần này ta chú ý định lí:
> - Nếu đường thẳng a và mặt phẳng (P) cùng vuông góc với mặt phẳng (Q) thì a chứa trong (P) hoặc a song song với (P)
> - a // (P), a $\subset$ (Q), (Q) $\cap$ (P) = b $\Rightarrow$ a // b

VD1: Cho hình chóp S.ABCD có SA $\perp$ (ABCD), SA = a. ABCD là hình vuông cạnh a, tâm O. Xét mặt phẳng (P) qua SO và vuông góc với (SAD). Tính diện tích thiết diện của (P) và hình chóp

Giải

Gọi I, J theo thứ tự là trung điểm của AD và BC

Rõ ràng IJ qua O (xem Hình 159)

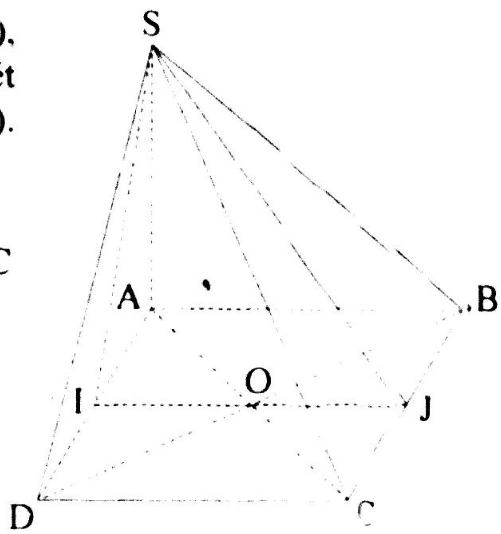
Vì ABCD là hình vuông nên IJ $\perp$ AD

Vì SA $\perp$ (ABCD) $\Rightarrow$ (SAD) $\perp$ (ABCD)

Lại do (SAD) $\cap$ (ABCD) = AD, IJ $\subset$ (ABCD)

$\Rightarrow$ IJ $\perp$ (SAD) $\Rightarrow$ (SIJ) $\perp$ (SAD)

Vậy thiết diện cần tìm là tam giác SIJ vuông tại I



Hình 159

Ta có $IJ = a$

$$SI = \sqrt{SA^2 + AI^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow S(SIJ) = \frac{1}{2} SI.IJ = \frac{1}{2}\frac{a\sqrt{5}}{2} a = \frac{a^2\sqrt{5}}{4}$$

VD2: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a. SA vuông góc với (ABCD) và SA = a. Gọi (P) là mặt phẳng qua AB và vuông góc với (SCD). Tính diện tích thiết diện của (P) và hình chóp S.ABCD

Giải

Ta có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp DC$

Mặt khác $CD \perp AD$

$\Rightarrow CD \perp (SAD)$

Dễ thấy tam giác SAD là tam giác vuông cân tại A

Gọi H là trung điểm của SD, ta có $AH \perp SD$ (1) (xem Hình 160)

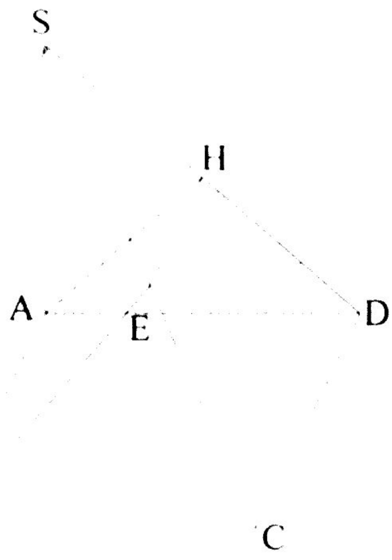
Lại do $CD \perp (SAD) \Rightarrow AH \perp CD$ (2)

(1) và (2) $\Rightarrow AH \perp (SCD) \Rightarrow (ABH) \perp (SCD)$

Vậy (P) là mặt phẳng (ABH)

(ABH) và (SCD) có điểm chung là H

Vì AB // CD nên giao tuyến của (ABH) và (SCD) là đường thẳng d qua H và song song với CD



Hình 160

Gọi E là giao điểm của d và SC

Thiết diện của (P) và hình chóp là hình thang ABEH vuông tại A, H

$$SD = \sqrt{SA^2 + AD^2} = a\sqrt{2}$$

$$AH = \frac{1}{2}SD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$EH = \frac{1}{2}CD = \frac{a}{2}$$

$$\Rightarrow S(ABEH) = AH\frac{AB + EH}{2} = a\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{a + \frac{a}{2}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{2}a^2}{8}$$

IV. Dạng toán 4: Ứng dụng của phép chiếu vuông góc

Phương pháp: Trong phần này nêu ra một số hướng áp dụng công thức: $S' = S.\cos\varphi$

Nếu biết hai trong ba đại lượng S, S', φ ta tính được đại lượng còn lại. Đặc biệt dựa vào công thức trên ta có thể tính được góc φ giữa hai mặt phẳng mà không cần dựng góc phẳng này

VD: Cho hình thoi ABCD có đỉnh A thuộc mặt phẳng (P), các đỉnh khác không thuộc (P), BD = a, AC = $a\sqrt{2}$. Gọi B', C', D' theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của B, C, D lên (P), biết AB'C'D' là hình vuông

a) Tính diện tích ABCD và AB'C'D', từ đó suy ra góc giữa hai mặt phẳng (ABCD) và (P)

b) Gọi E, F lần lượt là giao điểm của CB, CD với (P). Tính diện tích của tứ giác EFDB và EFD'B'

Giải

a) Ta có:

$$S(ABCD) = \frac{1}{2}AC.BD = \frac{\sqrt{2}a^2}{2}$$

$AC' \perp D'B' \Rightarrow AC' \perp DB$ (định lí ba đường vuông góc)

Lại theo giả thiết $DB \perp AC$ (xem Hình 161)

$\Rightarrow DB \perp (CAC') \Rightarrow DB \perp CC' \Rightarrow DB \perp BB'$

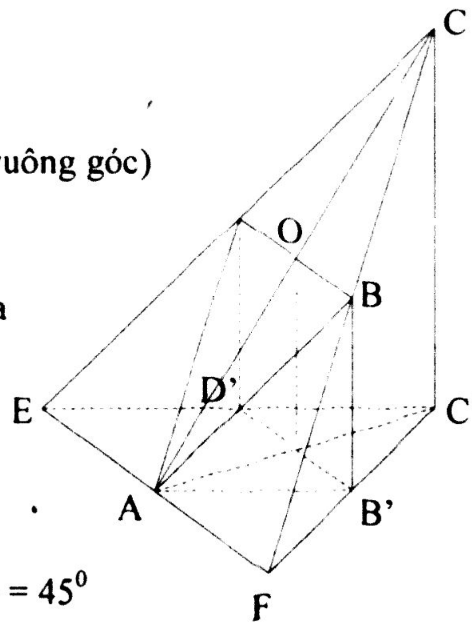
Vậy DBB'D' là hình chữ nhật nên B'D' = BD = a

$\Rightarrow S(AB'C'D') = 0,5.B'D'^2 = 0,5.a^2$

Gọi φ là góc giữa (P) và (ABCD) ta có:

$S(AB'C'D') = S(ABCD).\cos\varphi$

$$\Rightarrow \cos\varphi = \frac{S(AB'C'D')}{S(ABCD)} = \frac{\frac{a^2}{2}}{\frac{a^2\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = 45^0$$



Hình 161

b) Vì BD // B'D' ⇒ BD // EF // B'D'

DB là đường trung bình của tam giác CEF nên EF = 2DB = 2a

Hình thang EFDB có AO là đường cao nên

$$S(EFDB) = AO.\frac{DB+EF}{2} = \frac{1}{4}a\sqrt{2}(2a+a) = \frac{3a^2\sqrt{2}}{4}$$

$$S(EFD'B') = S(EFDB).\cos45^0 = \frac{3a^2}{4}$$

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho (P) và (Q) là hai mặt phẳng vuông góc nhau và giao tuyến của chúng là đường thẳng m. Gọi a, b, c, d là các đường thẳng. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng, mệnh đề nào sai?

(A) Nếu $a \subset (P)$ và $a \perp m$ thì $a \perp (Q)$ □ đúng, □ sai

(B) Nếu $b \perp m$ thì $b \subset (P)$ hoặc $b \subset (Q)$ □ đúng, □ sai

(C) Nếu c // m thì c // (P) hoặc c // (Q) □ đúng, □ sai

(D) Nếu $d \perp m$ thì $d \perp (P)$ □ đúng, □ sai

Câu 2: Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau và điểm M. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

(A) Có duy nhất một mặt phẳng qua M và vuông góc với (P)

(B) Có vô số mặt phẳng qua M và vuông góc với (P) và vuông góc với (Q)

(C) Có duy nhất một mặt phẳng qua M và vuông góc với (P) và vuông góc với (Q)

(D) Không có mặt phẳng nào qua M và vuông góc với (P) và vuông góc với (Q)

Câu 3: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng, mệnh đề nào sai?

(A) Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song nhau ☐ đúng, ☐ sai

(B) Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song nhau ☐ đúng, ☐ sai

(C) Qua một điểm có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước ☐ đúng, ☐ sai

(D) Qua một đường thẳng có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước ☐ đúng, ☐ sai

Câu 4: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng, mệnh đề nào sai?

(A) Qua một điểm có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước ☐ đúng, ☐ sai

(B) Nếu đường thẳng a vuông góc với b và mặt phẳng (P) chứa a, mặt phẳng (Q) chứa b thì (P) vuông góc với (Q) ☐ đúng, ☐ sai

(C) Cho đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và b nằm trong mặt phẳng (P). Mọi mặt phẳng (Q) chứa a và vuông góc với b thì (P) vuông góc với (Q) ☐ đúng, ☐ sai

(D) Cho đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P), mọi mặt phẳng (Q) chứa a thì (P) vuông góc với (Q) ☐ đúng, ☐ sai

Câu 5: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai?

(A) Hình lăng trụ tam giác có hai mặt bên là hai hình chữ nhật là hình lăng trụ đứng ☐ đúng, ☐ sai

(B) Hình chóp có đáy là đa giác đều và có ba cạnh bên bằng nhau là hình chóp đều ☐ đúng, ☐ sai

(C) Hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có AB = a, BC = b, CC_1 = c. Nếu $AC_1 = BD_1 = B_1D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ thì hình hộp là hình hộp chữ nhật ☐ đúng, ☐ sai

Câu 6: Cho tứ diện đều ABCD. Góc giữa (ABC) và (ABD) bằng α. Chọn khẳng định đúng

(A) $\alpha = 60^0$ **(B)** $\cos\alpha = \frac{1}{4}$ **(C)** $\cos\alpha = \frac{1}{5}$ **(D)** $\cos\alpha = \frac{1}{3}$

Câu 7: Cho hình chóp tam giác đều S.ABC với SA = 2AB. Gọi α là góc giữa (SAB) và (ABC). Chọn khẳng định đúng

(A) $\cos\alpha = \frac{1}{3\sqrt{5}}$ **(B)** $\cos\alpha = \frac{1}{2\sqrt{5}}$ **(C)** $\cos\alpha = \frac{1}{4\sqrt{5}}$ **(D)** $\alpha = 60^0$

Câu 8: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có SA = AB. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABCD). Chọn khẳng định đúng

(A) $\alpha = 60^0$ **(B)** $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ **(C)** $\cos\alpha = \frac{1}{3}$ **(D)** $\cos\alpha = \frac{2}{5}$

Câu 9: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có SA = AB. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD). Chọn khẳng định đúng

(A) $\alpha = 60^0$ **(B)** $\cos\alpha = \frac{2}{3}$ **(C)** $\cos\alpha = \frac{1}{3}$ **(D)** $\cos\alpha = \frac{2}{5}$

Câu 10: Cho tam giácABC vuông tại A, cạnh AB = a nằm trong mặt phẳng (P). Cạnh AC = $a\sqrt{2}$ và tạo với (P) góc 60^0. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng?

(A) BC tạo với (P) góc 60^0

(B) BC tạo với (P) góc 45^0

(C) BC tạo với (P) góc 30^0

(D) Góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (P) là 45^0

Câu 11: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh bằng a và góc $\angle ABC = 60^0$. Các cạnh SA SB, SC đều bằng $a\frac{\sqrt{3}}{2}$. Gọi φ là góc của hai mặt phẳng (SAC) và (ABCD). Giá trị $\tan\varphi$ bằng bao nhiêu?

(A) $5\sqrt{3}$ **(B)** $\sqrt{3}$ **(C)** $2\sqrt{5}$ **(D)** $3\sqrt{5}$

Câu 12: Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Góc giữa hai mặt phẳng nào sau đây có số đo bằng 45^0?

(A) $(ABCD)$ và (AA_1BB_1) **(B)** (ABA_1B_1) và (BB_1CC_1)

(C) (ADB_1C_1) và (A_1D_1BC) **(D)** (ADB_1C_1) và $(ABCD$

Câu 13: Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (ADB_1C_1) và (AA_1CC_1). Chọn khẳng định đúng

(A) $\alpha = 45^0$ **(B)** $\alpha = 30^0$ **(C)** $\alpha = 60^0$ **(D)** $\alpha = 90^0$

Câu 14: Cho hình tứ diện ABCD có hai mặt (ABC) và (ABD) cùng vuông góc với (DBC). Gọi BE và DF là hai đường cao của tam giác BCD, DK là đường cao của tam giác ACD. Chọn khẳng định sai

(A) $(ABE) \perp (ADC)$ **(B)** $(ABD) \perp (ADC)$

(C) $(ABC) \perp (DFK)$ **(D)** $(ADC) \perp (DFK)$

Câu 15: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a. SA vuông góc với đáy và SA = $\frac{a}{\sqrt{3}}$. Góc giữa (SBC) và (ABCD) bằng bao nhiêu?

(A) 30^0 **(B)** 45^0 **(C)** 60^0 **(D)** 90^0

Câu 16: Tứ diện SABC có $(SBC) \perp (ABC)$. SBC là tam giác đều cạnh a. ABC là tam giác vuông tại A và $B = 30^0$. Gọi φ là góc giữa (SAB) và (ABC), chọn khẳng định đúng

(A) $\tan\varphi = 2\sqrt{3}$ **(B)** $\tan\varphi = 3\sqrt{3}$ **(C)** $\varphi = 60^0$ **(D)** $\varphi = 30^0$

Câu 17: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với (ABCD) và SA = a. Góc giữa (SBC) và (SCD) bằng bao nhiêu?

(A) 60^0 **(B)** 30^0 **(C)** 45^0 **(D)** 90^0

Câu 18: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và SA = $a\sqrt{3}$. Gọi góc giữa (SBC) và (SCD) là φ. Chọn khẳng định sai

(A) $\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{4}$ **(B)** $\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{\sqrt{10}}{4}$ **(C)** $\cos\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{4}$ **(D)** $\cos\frac{\varphi}{2} = \frac{\sqrt{10}}{4}$

Câu 19: Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Mặt phẳng (A_1BD) không vuông góc với mặt phẳng nào dưới đây?

(A) (ACC_1A_1) **(B)** (ABD_1) **(C)** (AB_1D) **(D)** (A_1BC_1)

Câu 20: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và D. AB = 2a, AD = DC = a. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và SA = $a\sqrt{2}$

Chọn khẳng định sai

(A) (SBC) ⊥ (SAC)

(B) (SBC) tạo với đáy góc 45^0

(C) (SDC) hợp với (BCD) góc 60^0

(D) Giao tuyến của (SAB) và (SCD) song song với AB

Câu 21: Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a nằm trong mặt phẳng (P). Trên các đường vuông góc với (P) tại B, C lần lượt lấy D, E nằm cùng một bên đối với (P) sao cho BD = $a\frac{\sqrt{3}}{2}$, CE = $a\sqrt{3}$. Góc giữa (P) và (ADE) bằng bao nhiêu?

(A) 30^0 **(B)** 45^0 **(C)** 60^0 **(D)** 90^0

Câu 22: Cho hình chóp S.ABCD với ABCD là hình chữ nhật có AB = a, AD = 2a. SA vuông góc với đáy (ABCD) và SA = a. Gọi (P) là mặt phẳng qua SO và vuông góc với (SAD). Diện tích thiết diện của (P) và hình chóp S.ABCD bằng bao nhiêu?

(A) $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$ **(B)** a^2 **(C)** $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ **(D)** $\frac{a^2}{2}$

Câu 23: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD, O là tâm của hình vuông ABCD, AB = a, SO = 2a. Gọi (P) là mặt phẳng qua AB và vuông góc với mặt phẳng (SCD). Thiết diện của (P) và hình chóp S.ABCD là hình gì?

(A) Tam giác cân **(B)** Hình thang cân

(C) Hình bình hành **(D)** Hình thang vuông

Câu 24: Cho tam giác cân ABC có đường cao AH = $a\sqrt{3}$, đáy BC = 3a. BC chứa trong mặt phẳng (P). Gọi A' là hình chiếu vuông góc của A lên (P). Biết tam giác A'BC vuông tại A'. Gọi φ là góc giữa (P) và (ABC). Chọn khẳng định đúng

(A) 45^0 **(B)** 60^0 **(C)** 30^0 **(D)** $\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{3}$

Câu 25: Cho tam giác đều ABC cạnh a. d_B, d_C lần lượt là đường thẳng đi qua B, C và vuông góc với (ABC). (P) là mặt phẳng qua A và hợp với (ABC) góc 60^0. (P) cắt d_B, d_C lần lượt tại D, E. Biết $AD = a\dfrac{\sqrt{6}}{2}$, $AE = a\sqrt{3}$. Đặt $\alpha = \widehat{DAE}$. Chọn khẳng định đúng

(A) $\alpha = 60^0$ **(B)** $\alpha = 30^0$ **(C)** $\sin\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{6}}$ **(D)** $\sin\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{6}}$

TRẢ LỜI

Câu 1:

(A) Khẳng định đúng
(B) Khẳng định sai
(C) Khẳng định đúng
(D) Khẳng định sai

Câu 2: (C)

Câu 3:

(A) Khẳng định sai.
(B) Khẳng định đúng
(C) Khẳng định sai
(D) Khẳng định sai.

Câu 4:

(A) Mệnh đề đúng
(B) Mệnh đề sai
(C) Mệnh đề đúng
(D) Mệnh đề đúng

Câu 5:

(A) Khẳng định đúng
(B) Khẳng định đúng
(C) Khẳng định đúng

Câu 6: (xem Hình 160)

Gọi M là trung điểm của AB. Ta có:

$DM \perp AB$, $CM \perp AB$ (trung tuyến của tam giác đều còn là đường cao)

Vì vậy góc giữa (ABC) và (ABD) là góc $\widehat{DMC} = \varphi$

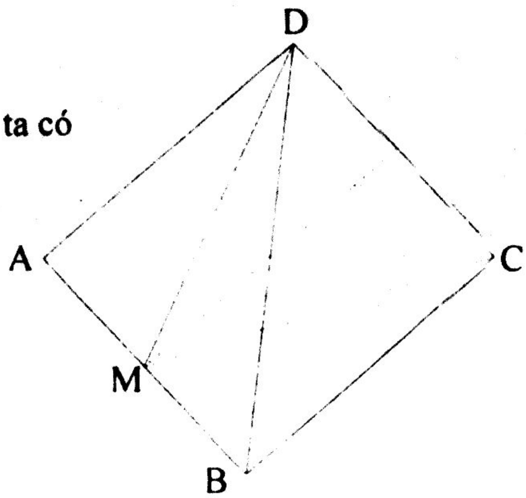
Ta có CD = a, $DM = CM = a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Áp dụng định lí Côsin cho tam giác DMC ta có

$$\cos\varphi = \frac{DM^2 + MC^2 - DC^2}{2DM.MC}$$

$$= \frac{2a^2.\dfrac{3}{4} - a^2}{2.a^2.\dfrac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

ĐS: (D)



Hình 162

Câu 7: (xem Hình 163)

Gọi M là trung điểm của AB. Ta có:

SM $\perp$ AB (do tam giác SAB cân tại S),

CM $\perp$ AB (do tam giác ABC đều)

Vậy góc giữa (SAB) và (ABC) bằng góc SMC

Đặt AB = 2a

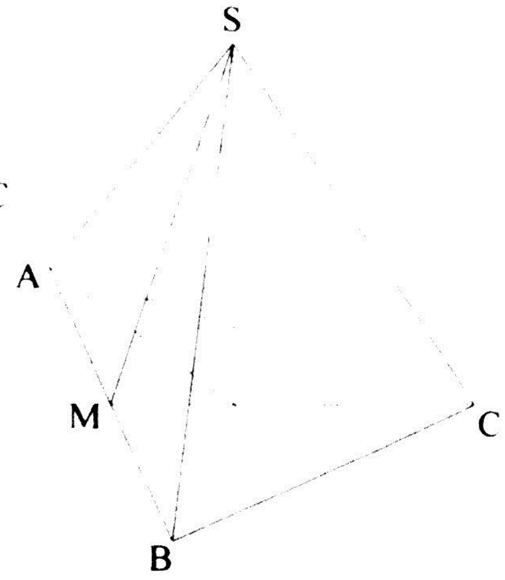
Tam giác SMA vuông tại M, theo định lí Pitagor ta có:

$$SM^2 = SA^2 - AM^2 = 16a^2 - a^2 = 15a^2$$

$CM = a\sqrt{3}$ (đường cao của tam giác đều cạnh 2a)

$$\cos\alpha = \frac{SM^2 + MC^2 - SC^2}{2.SM.MC}$$

$$= \frac{15a^2 + 3a^2 - 16a^2}{2.a\sqrt{15}a.\sqrt{3}} = \frac{1}{3\sqrt{5}}$$



Hình 163

ĐS: (A) S

Câu 8: (xem Hình 164)

Gọi M là trung điểm của AB, N là trung điểm của CD

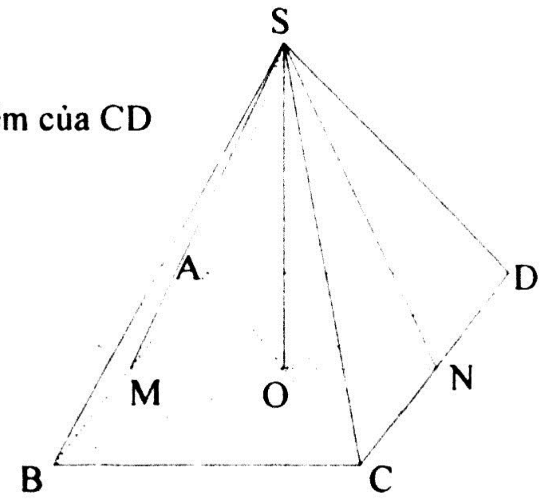
Vì AD $\perp$ AB và AD // MN $\Rightarrow$ MN $\perp$ AB

Do tam giác SAB đều nên AB $\perp$ SM

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABCD) là góc $\widehat{SMN}$

Ta có: MN = a; SN = SM = $a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(đường cao của tam giác đều)



Hình 164

Áp dụng định lí Côsin cho tam giác SMN ta có

$$\cos\alpha = \frac{SM^2 + MN^2 - SN^2}{2SM.MN} = \frac{MN^2}{2SM.MN}$$

$$= \frac{a^2}{2.a^2.\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

ĐS: (B)

Câu 9: (xem Hình 165)

Gọi M là trung điểm của SA, ta có

BM $\perp$ SA, DM $\perp$ SA (trung tuyến của tam giác đều)

Mặt khác (SAB) $\cap$ (SAD) = SA

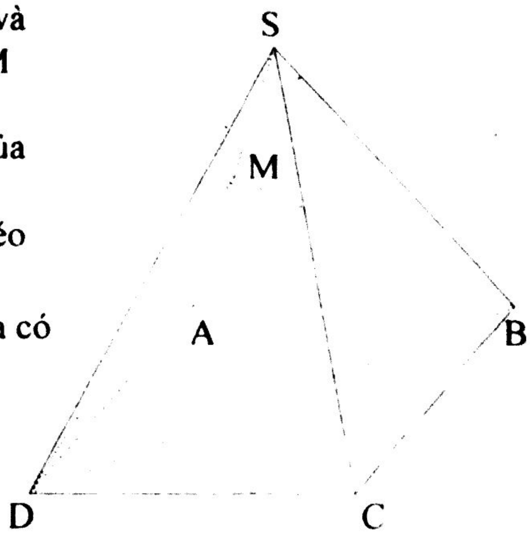
Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SAB) là góc giữa hai đường thẳng BM và DM

Ta có $BM = DM = a\frac{\sqrt{3}}{2}$ (đường cao của tam giác đều cạnh a). $BD = a\sqrt{2}$ (đường chéo của hình vuông cạnh a)

Áp dụng định lí côsin cho tam giác BMD ta có

$$\cos\alpha = \left|\frac{BM^2 + DM^2 - BD^2}{2.BM.DM}\right|$$

$$= \left|\frac{a^2\frac{3}{2} - 2a^2}{a^2.\frac{3}{2}}\right| = \frac{1}{3}$$



Hình 165

ĐS: (C)

Câu 10: (xem Hình 166)

Gọi H là hình chiếu vuông góc của C lên (P)

Theo định lí ba đường vuông góc thì $AB \perp AH$

Theo giả thiết $\widehat{CAH} = 60^0$

Tam giác vuông CAH cho ta

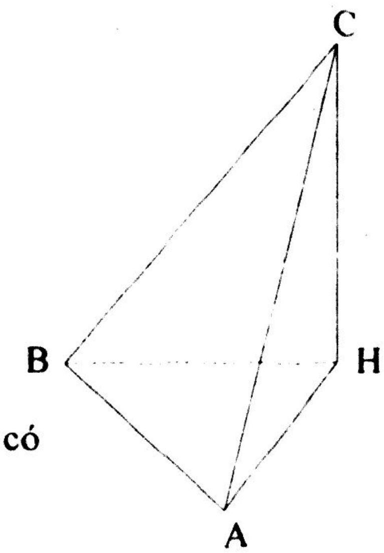
$$CH = \sin60^0 AC = a\frac{\sqrt{6}}{2}$$

Áp dụng định lí Pitagor cho tam giác vuông CBA ta có

$$CB = \sqrt{AB^2 + AC^2} = a\sqrt{3}$$

Do góc giữa BC và (P) là góc $\widehat{CBH} = \varphi$

Ta có: $\sin\varphi = \frac{CH}{CB} = \frac{\sqrt{2}}{2}$



Hình 166

ĐS: (B)

Câu 11: (xem Hình 167)

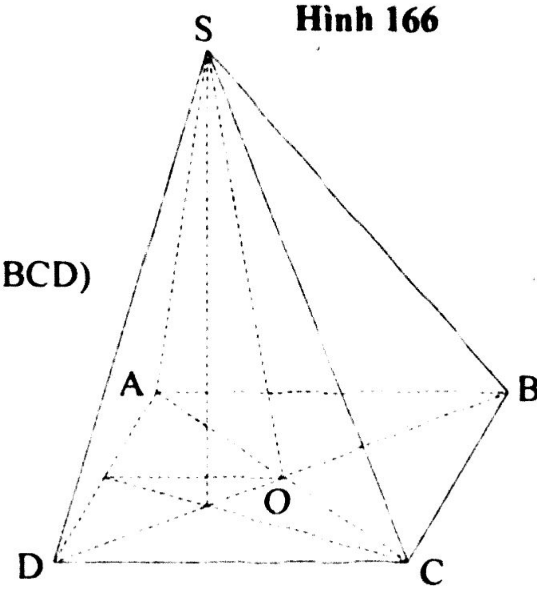
Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên (ABCD)

Vì SA= SB = SC nên H là tâm đường tròn ngoại tiếp ABC

Gọi O là tâm của ABCD thì $HO \perp AC$

$\Rightarrow SO \perp AC$

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (ABCD) là $\widehat{SOH} = \varphi$



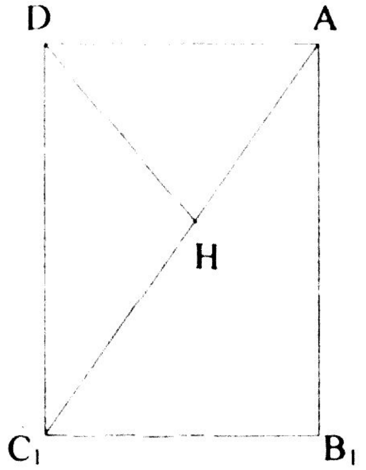
Hình 167

$$HO = a\frac{\sqrt{3}}{6}\ ;\ SH = \sqrt{SC^2 - CH^2} = a\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}$$

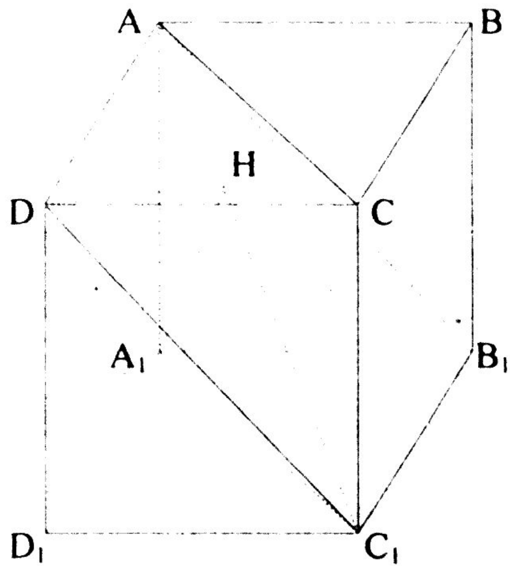
$$\tan\varphi = \frac{SH}{HO} = 3\sqrt{5}$$

ĐS: (D)

Câu 12: (D) (có thể xem Hình 168)



Hình 169



Hình 168

Câu 13: Gọi H là hình chiếu vuông góc của D lên AC_1

Hai tam giác AHD và AHA_1 có AH là cạnh chung, $AD = AA_1$, $\widehat{DAH} = \widehat{A_1AH}$ (do hai tam giác vuông DAC_1 và A_1AC_1 bằng nhau) (xem Hình 168)

$\Rightarrow \Delta AHD = \Delta AHA_1 \Rightarrow A_1H \perp AC_1$

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (ADB_1C_1) và (AA_1CC_1) bằng góc giữa hai đường thẳng DH và HA_1

DH là đường cao của tam giác vuông ADC_1 (xem hình 169), ta có:

$$\frac{1}{DH^2} = \frac{1}{DC_1^2} + \frac{1}{DA^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{3}{2a^2} \Rightarrow DH^2 = \frac{2a^2}{3}$$

Áp dụng định lí Côsin vào tam giác cân DHA_1 ta có:

$$\cos\alpha = \left|\cos\widehat{DHA_1}\right| = \left|\frac{DH^2 + HA_1^2 - DA_1^2}{2.DHHA_1}\right| = \left|\frac{\frac{4}{3}a^2 - 2a^2}{\frac{4}{3}a^2}\right| = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow \alpha = 60^0$

ĐS: (C)

Có thể giải gọn hơn nhiều bằng nhận xét sau: Cho hai đường thẳng a, b theo thứ tự vuông góc với mp(P) và mp(Q), ta có góc giữa (P) và (Q) bằng góc giữa a và b

Ta có $B_1D_1 \perp (AA_1CC_1)$, $CD_1 \perp (ADB_1C_1)$

Dễ thấy CD_1B_1 là tam giác đều nên góc giữa B_1D_1 và CD_1 bằng 60^0, do đó góc giữa (AA_1CC_1) và (ADB_1C_1) bằng 60^0

Câu 14: (xem Hình 170)

Ta có:

$BE \perp CD$ và $AB \perp CD$ (do $AB \perp (BCD)$)

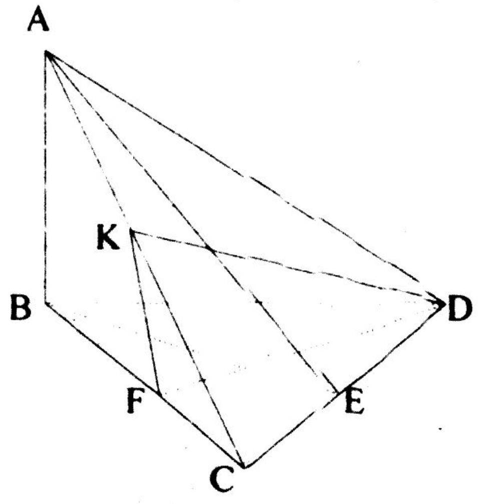
$\Rightarrow CD \perp (ABE)$

Mặt khác $(ADC) \supset CD$

Nên $(ABE) \perp (ADC)$, khẳng định (A) đúng

Chứng minh tương tự ta có khẳng định ở (C) đúng

Ta chứng minh khẳng định ở (D) đúng



Hình 170

Ta có: $AC \perp DK$ (DK là đường cao của tam giác ADC) (1)

$DF \perp BC$ (giả thiết), theo định lí ba đường vuông góc ta có $AC \perp DF$ (2)

(1) và (2) $\Rightarrow AC \perp (DEK) \Rightarrow (ADC) \perp (DEK)$

ĐS: (B)

Câu 15: (bạn đọc tự vẽ hình)

Ta có: $BC \perp AB$

Theo định lí ba đường vuông góc: $BC \perp SB$

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABCD) bằng góc $\widehat{SBA} = \varphi$

Tam giác SAB vuông tại A ta có

$$\tan\varphi = \frac{SA}{AB} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$\Rightarrow \varphi = 30^0$

ĐS: (A)

Câu 16: (xem Hình 171)

Gọi H, I lần lượt là trung điểm của BC và AB

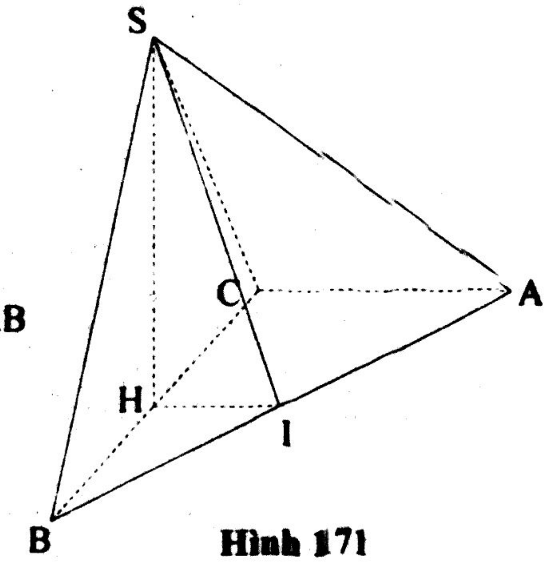
Ta có HI // AC $\Rightarrow AB \perp HI$

Lại do SBC là tam giác đều nên $SH \perp BC$

$\Rightarrow SH \perp (ABC)$

Theo định lí ba đường vuông góc ta có

$AB \perp SI$



Hình 171

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABC) là góc $\widehat{HIS} = \varphi$

$$SH = a\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$AC = BC\sin30^0 = \frac{a}{2} \Rightarrow HI = \frac{a}{4}$$

Tam giác SHI vuông tại H ta có $\tan\varphi = \dfrac{SH}{HI} = 2\sqrt{3}$

ĐS: (A)

Câu 17: (xem Hình 172)

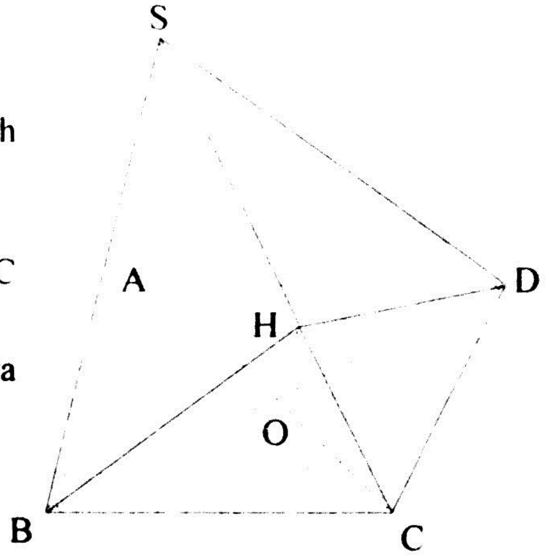
Vì $BD \perp AC$ (hai đường chéo của hình vuông) nên $BD \perp SC$ (AC là hình chiếu của SC trên (ABCD)) (1)

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên SC (O là tâm của hình vuông), ta có $SC \perp OH$ (2)

(1) và (2) cho ta $SC \perp (BDH)$. Vậy góc giữa (SBC) và (SCD) là góc giữa BH và DH

ΔSAC vuông, ta có:

$$SC = \sqrt{AC^2 + SA^2} = a\sqrt{3}$$



Hình 172

Ta tính OH. Ta có:

ΔOHC đồng dạng với ΔSAC (hai tam giác vuông có cùng góc nhọn)

$$\frac{OH}{SA} = \frac{OC}{SC} = \frac{a\frac{\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \Rightarrow OH = \frac{a}{\sqrt{6}}$$

Dễ chứng minh ΔBHD cân tại H, vì vậy trung tuyến HO còn là đường cao, nên $HO \perp BD$

Tam giác OHB vuông tại O cho ta: $\tan\widehat{BHO} = \dfrac{OB}{OH} = \sqrt{3}$

$\Rightarrow \widehat{BHO} = 60^0 \Rightarrow \widehat{BHD} = 120^0 \Rightarrow$ Góc giữa (SBC) và (SCD) bằng 60^0

ĐS: (A)

Câu 18: (xem Hình 173)

Từ O kẻ OI vuông góc với SC

Lại do $BD \perp SC$ nên $SC \perp (BID)$

$\Rightarrow BI \perp SC$

Mặt khác $ID \perp SC$ nên $\widehat{BID} = \varphi$ là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD)

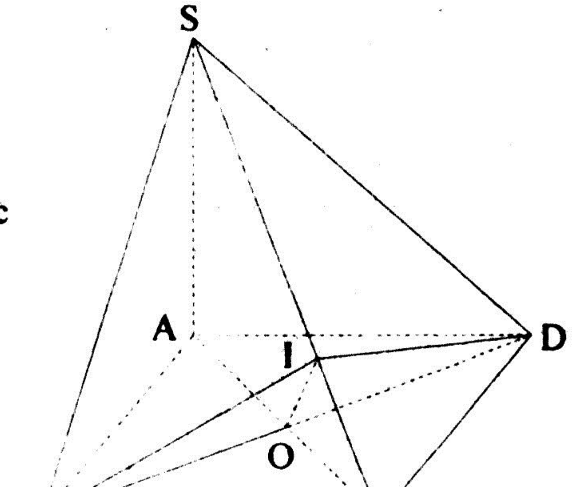
Áp dụng định lí Pitagor ta có:

$$SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = 2a$$

$$SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = a\sqrt{5}$$

Tam giác SBC vuông tại B nên

$$BI = \frac{SB.BC}{SC} = \frac{2a}{\sqrt{5}}$$



Hình 173

Ta có: $\widehat{BIO} = \frac{\varphi}{2}$

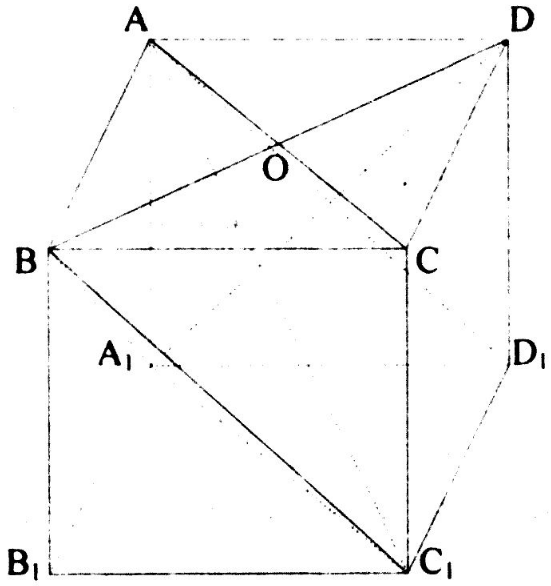
$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{BO}{BI} = \frac{\sqrt{10}}{4}$$

ĐS; (B)

Câu 19: (xem Hình 174)

Vì BDC_1A_1 là tứ diện đều nên hai mặt bên (A_1BD) và (A_1BC_1) không vuông góc nhau

ĐS: (D)



Hình 174

Câu 20: (xem Hình 175)

Gọi M là trung điểm AB. AMCD là hình vuông ta có CM = a

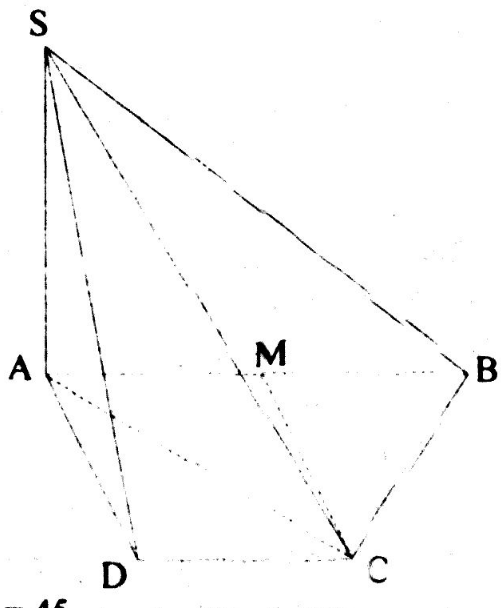
Tam giác ACB có trung tuyến CM = 0,5.AB nên vuông tại C vậy $BC \perp AC$

Lại do $SA \perp (ABCD) \Rightarrow BC \perp SA$

Vậy $BC \perp (SAC) \Rightarrow (SBC) \perp (SAC)$

Khẳng định (A) đúng

Theo chứng minh trên $BC \perp AC$ vì vậy theo định lí ba đường vuông góc $SC \perp BC$



Hình 175

Vậy góc giữa (SBC) và (ABCD) là góc $\widehat{SCA} = 45$

Khẳng định (B) đúng

$DC \perp AD$, theo định lí ba đường vuông góc $DC \perp SD$

Vậy góc giữa (SDC) và (ABCD) là góc $\widehat{ADS} = \varphi$

$$\tan\varphi = \frac{SA}{AD} = \sqrt{2}$$. Khẳng định (C) sai.

ĐS: (C)

Câu 21: (xem Hình 176)

Gọi F là giao điểm của DE và BC

$(P) \cap (ADE) = AF$

Vì $CE = 2BD$ nên B là trung điểm của FC vậy tam giác AFC vuông tại A

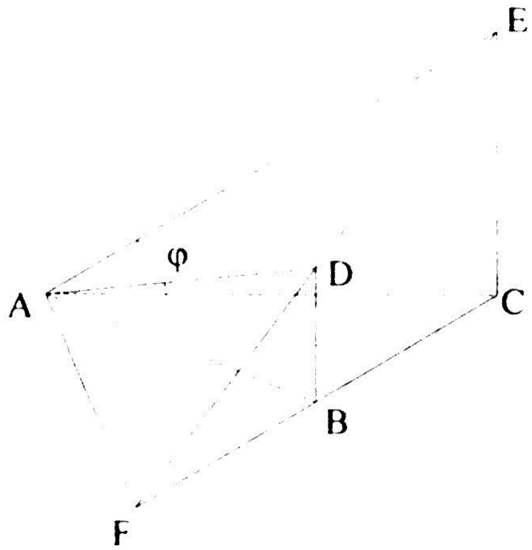
$\Rightarrow AF \perp AE$

Vậy góc giữa (P) và (ADE) bằng góc $\widehat{EAC} = \varphi$

$$\tan\varphi = \frac{CE}{CA} = \sqrt{3}$$

$\Rightarrow \varphi = 60^0$

ĐS: (C)



Hình 176

Câu 22: (xem Hình 177)

Gọi I, J theo thứ tự là trung điểm của AD và BC

Rõ ràng IJ qua O

Vì ABCD là hình chữ nhật nên $IJ \perp AD$

Vì $SA \perp (ABCD) \Rightarrow (SAD) \perp (ABCD)$

Lại do $(SAD) \cap (ABCD) = AD$, $IJ \subset (ABCD)$

$\Rightarrow IJ \perp (SAD) \Rightarrow (SIJ) \perp (SAD)$

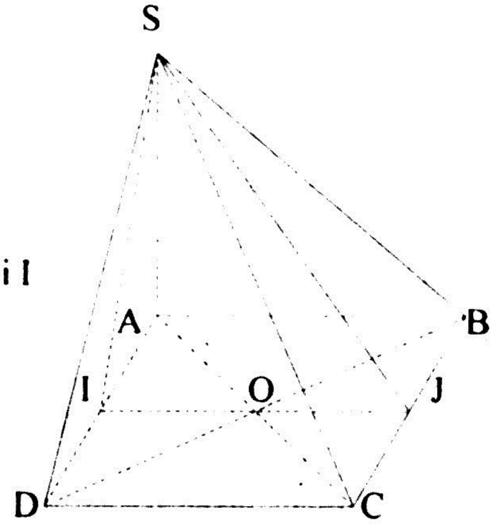
Vậy thiết diện cần tìm là tam giác SIJ vuông tại I

Ta có $IJ = AB = a$

$SI = \sqrt{SA^2 + AI^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$

$$\Rightarrow S(SIJ) = \frac{1}{2} SI.\,IJ = \frac{1}{2} a.a\sqrt{2} = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}$$

ĐS: A



Hình 177

Câu 23: (xem Hình 178)

Gọi J, I theo thứ tự là trung điểm của AB và CD

Xét tam giác SIJ

Dễ thấy SIJ là tam giác cân tại S.

Mặt khác $SO = 4OI$

Vì vậy góc $\widehat{OSI} < 45^0 \Rightarrow \widehat{JSI} < 90^0$

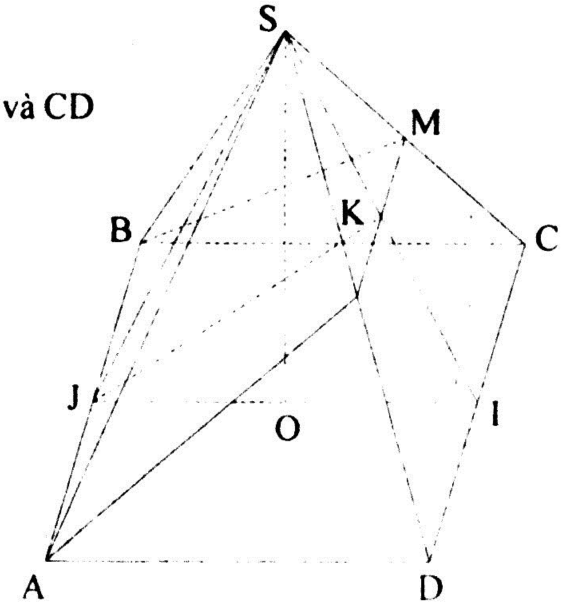
Gọi K là hình chiếu của J lên SI thì K thuộc đoạn SI

Ta có: $JK \perp SI$ (1)

$CD \perp JI \Rightarrow CD \perp JK$ (2)

(1) và (2) $\Rightarrow JK \perp (SCD)$

Vậy (P) chính là (ABK)



Hình 178

Gọi M, N theo thứ tự là giao điểm của (P) và SC và SD

Vì AB // CD ⇒ MN // AB // CD

Vậy ABMN là hình thang. Rõ ràng IJ vuông góc với hai đáy AB và MN tại các trung điểm J, K của AB và MN

Vậy thiết diện ABMN là hình thang cân

ĐS: (B)

Câu 24: Ta có: $AH \perp BC$

$\Rightarrow BC \perp A'H$ (định lí ba đường vuông góc)

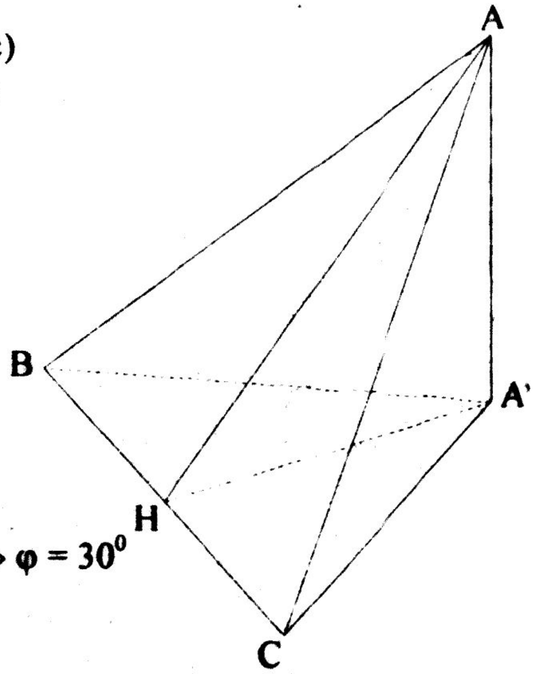
$\Rightarrow A'BC$ vuông cân tại A' (xem Hình 179)

$$\Rightarrow A'H = 0,5.BC = \frac{3}{2}a$$

$$\text{Vậy } S(A'BC) = \frac{1}{2}A'H.BC = \frac{9a^2}{4}$$

$$S(ABC) = \frac{1}{2}AH.BC = \frac{3\sqrt{3}a^2}{2}$$

$$\Rightarrow \cos\varphi = \frac{S(A'BC)}{S(ABC)} = \frac{\frac{9a^2}{4}}{\frac{3\sqrt{3}a^2}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = 30^0$$



Hình 179

ĐS: (C)

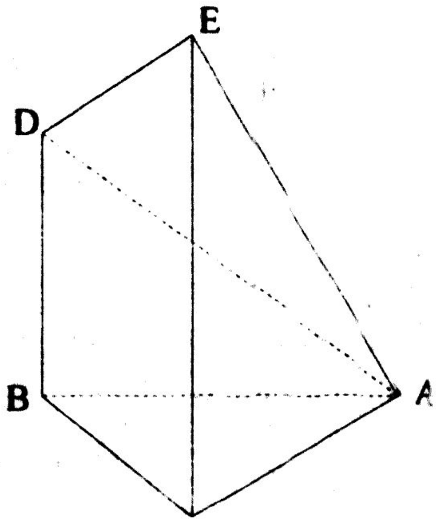
Câu 25: (xem Hình 180)

$$S(ABC) = \frac{1}{2}AB.AC.\sin A = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Hình chiếu vuông góc của tam giác ADE lên mặt phẳng (ABC) là tam giác ABC, vì vậy:

$$S(ABC) = S(ADE).\cos 60^0 = \frac{1}{2}S(ADE)$$

$$\Rightarrow S(ADE) = 2S(ABC) = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \quad (1)$$



Hình 180

Theo công thức tính diện tích tam giác:

$$S(ADE) = \frac{1}{2}AD.AE.\sin\alpha \; (\alpha = \widehat{DAE})$$

$$= \frac{a^2\sqrt{18}}{4}.\sin\alpha \quad (2)$$

(1) và (2) suy ra: $\frac{a^2\sqrt{18}}{4}.\sin\alpha = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{6}}$

ĐS: (C)

§5. KHOẢNG CÁCH

TÓM TẮT LÍ THUYẾT

Các định nghĩa:

1. Cho điểm O và đường thẳng a, H là hình chiếu của O lên a, ta có: d(O, a) = OH

2. Cho điểm O và mặt phẳng (P), H là hình chiếu của O lên (P), ta có: d(O, (P)) = OH

3. Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (P), A là điểm bất kì thuộc a, ta có:

$$d(a, (P)) = d(A, (P))$$

4. Cho hai mặt phẳng song song (P) và (Q) A là điểm bất kì thuộc (P), ta có:

$$d((P), (Q)) = d(A, (Q))$$

5. Cho hai đường thẳng chéo nhau a, b. Lấy hai điểm A, B lần lượt thuộc a, b sao cho AB $\perp$ a và AB $\perp$ b. AB được gọi là đoạn vuông góc chung của a và b

Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng độ dài đoạn vuông góc chung

CÁC DẠNG TOÁN CƠ BẢN

I. Dạng toán 1: Tính khoảng cách từ điểm O đến đường thẳng a

Phương pháp:

- Trong mặt phẳng (O, a), từ O kẻ OH vuông góc với a (H $\in$ a), sử dụng các kiến thức hình học phẳng như định lí Pitagor, Côsin, Sin, phương pháp vectơ, diện tích... để tính OH

Chú ý: Trong một số bài toán, để dựng được OH, ta dựng qua O mặt phẳng vuông góc với a cắt a tại H

VD: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, tâm O. Cạnh bên SA vuông góc với đáy, SA = a. Gọi I là trung điểm của SC, M là trung điểm của AB. Khoảng cách từ I đến CM bằng bao nhiêu?

Giải

IO // SA $\Rightarrow$ IO $\perp$ (ABCD) (xem Hình 181)

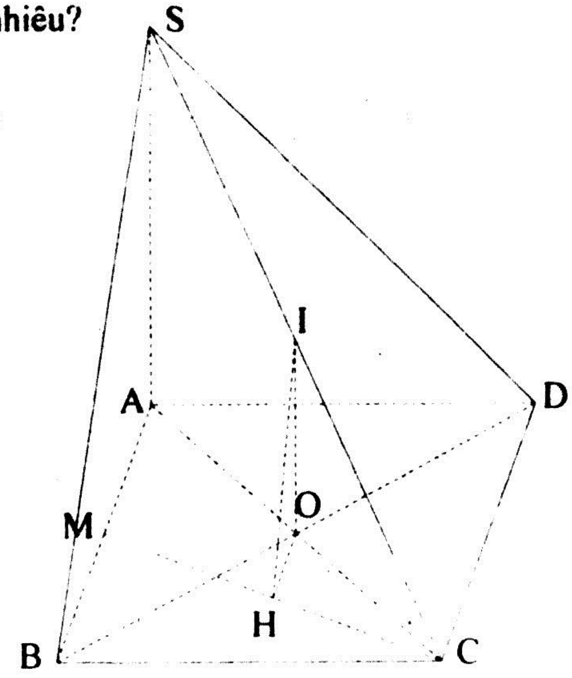
Từ O kẻ OH $\perp$ CM thì IH $\perp$ CM (định lí 3 đường vuông góc)

Vậy IH là khoảng cách từ I đến CM

$$CM = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = a\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$S(OCM) = \frac{1}{2}S(ACM)$$

$$= \frac{1}{4}S(ABC) = \frac{a^2}{8} \quad (1)$$



Hình 181

$$S(OCM) = \frac{1}{2}OH.CM = a\frac{\sqrt{5}}{4}OH$$

Thế vào (1) ta có

$$\Rightarrow OH = \frac{a}{2\sqrt{5}} \Rightarrow IH = \sqrt{OI^2 + OH^2} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{10}}$$

II. Dạng toán 2: Tính khoảng cách từ một điểm O đến mặt phẳng (P)

Phương pháp: Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên (P), ta có d(O, (P)) = OH

VD: Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có cạnh đáy bằng 3a, cạnh bên bằng 2a. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Tính khoảng cách từ G và A đến mặt phẳng (SBC)

Giải

Gọi M là trung điểm của BC, ta có (xem h182)

$$AG = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}.3a = \sqrt{3}a;\ GM = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

Vì S.ABC là hình chóp đều nên $SG \perp (ABC)$

$\Rightarrow SG \perp AM$

Tam giác SAG vuông tại G ta có:

$$SG = \sqrt{SA^2 - AG^2} = a$$

Gọi H là hình chiếu của G lên SM, ta có

$GH \perp SM$ (1)

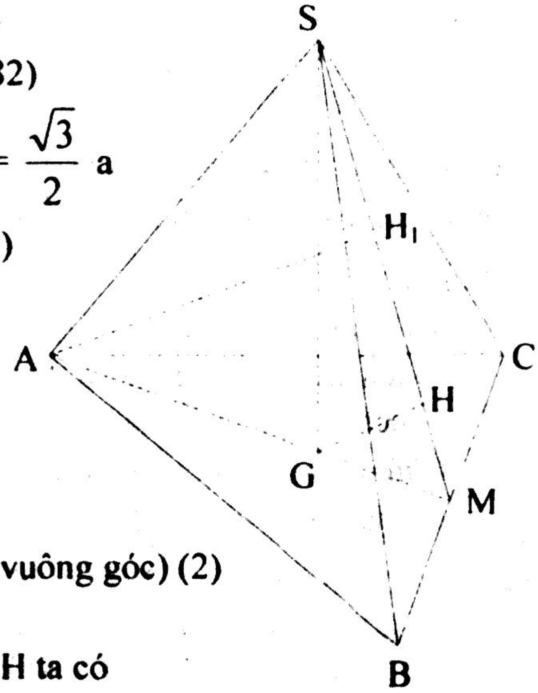
Vì $BC \perp AM \Rightarrow BC \perp GH$ (định lí 3 đường vuông góc) (2)

(1) và (2) $\Rightarrow GH \perp (SBC)$

Tam giác SGM vuông tại G có đường cao GH ta có

$$\frac{1}{GH^2} = \frac{1}{SG^2} + \frac{1}{GM^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{4}{3a^2} = \frac{7}{3a^2}$$

$$\Rightarrow GH = \frac{a\sqrt{21}}{7}$$



Hình 182

Vậy $d(G, (SBC)) = \frac{a\sqrt{21}}{7}$

Gọi H_1 là hình chiếu của A lên (SBC), ta có:

$$\frac{HG}{AH_1} = \frac{MG}{MA} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow d(A, (SBC)) = 3.d(G, (SBC)) = 3.\frac{a\sqrt{21}}{7}$$

III. Dạng toán 3: Tính khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song với nó, khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song

Phương pháp: Sử dụng các định nghiã:

- Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (P), A là điểm bất kì thuộc a, ta có:

$$d(a, (P)) = d(A, (P))$$

- Cho hai mặt phẳng song song (P) và (Q) A là điểm bất kì thuộc (P), ta có:

$$d((P), (Q)) = d(A, (Q))$$

Qui về tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

VD1: Cho tam giác ABC vuông tại A, AB = a, AC = 2a. c là đường thẳng qua A và vuông góc với (ABC), b là đường thẳng qua B và vuông góc với (ABC). Tính d(b, (C, c)), d(c, (C, b))

Giải

a) Tính d(b, (C, c)).

Vì $b \parallel c \Rightarrow b \parallel (C, c) \Rightarrow d(b, (C, c)) = d(B, (C, c))$

Ta có $BA \perp AC$ (1)

$c \perp (ABC) \Rightarrow BA \perp c$ (2)

(1) và (2) $\Rightarrow BA \perp (C, c)$

$\Rightarrow d(b, (C, c)) = d(B, (C, c)) = BA = a$

b) Tính d(c, (C, b))

Gọi H là hình chiếu của A lên BC, $AH \perp BC$ (xem Hình 183)

Vì $AH \perp b$ (do $b \perp (ABC)$)

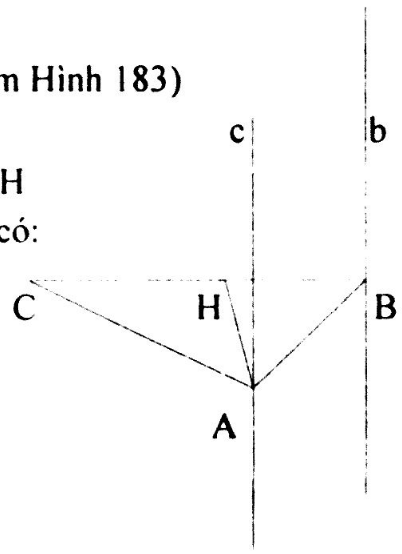
$\Rightarrow AH \perp (C, b) \Rightarrow d(c, (C, b)) = d(A, (C, b)) = AH$

Tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH ta có:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{5}{4a^2}$$

$$\Rightarrow AH = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$$

$$\Rightarrow d(c, (C, b)) = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$$



Hình 183

VD2: Cho hình thoi ABCD cạnh bằng 2 và diện tích bằng $\sqrt{5}$. a và b là hai đường thẳng lần lượt qua A và B và vuông góc với (ABCD). Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng (D, a) và (C, b)

Giải

Rõ ràng $(D, a) \parallel (C, b)$, vì vậy

$d((D, a), (C, b)) = d(C, (D, a))$

Từ C kẻ $CH \perp AD$ (1) (xem Hình 184)

Vì $a \perp (ABCD) \Rightarrow CH \perp a$ (2)

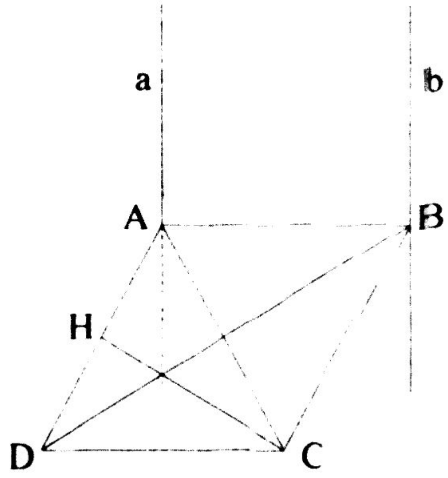
(1) và (2) ⇒ CH ⊥ (D, a)

Ta có: $S(ACD) = \frac{1}{2}S(ABCD) = \frac{\sqrt{5}}{2}$

Mặt khác: $S(ACD) = \frac{1}{2}CH.AD = CH$

$\Rightarrow CH = \frac{\sqrt{5}}{2}$

Vậy $d((D, a), (C, b)) = CH = \frac{\sqrt{5}}{2}$



Hình 184

VD3: Cho hình chóp S.ABCD có SA vuông góc (ABCD) và $SA = a\sqrt{6}$, ABCD là hình thang có đáy lớn AD = 2a, đáy nhỏ BC = a, DC = a, AC ⊥ CD.

a) Tính khoảng cách từ A đến (SCD)

b) Tính khoảng cách từ AD đến (SBC)

Giải

a) Gọi H là hình chiếu của A lên SC. Ta có AH ⊥ SC (*)

SA ⊥ (ABCD) ⇒ SA ⊥ CD (1)

Theo giả thiết CD ⊥ AC (2)

(1) và (2) ⇒ CD ⊥ (SAC) ⇒ CD ⊥ AH (**)

(*) và (**) ⇒ AH ⊥ (SCD)

Áp dụng định lí Pitagor cho tam giác vuông ACD

$AC = \sqrt{AD^2 - CD^2} = a\sqrt{3}$

Tam giác SAC vuông tại A với đường cao AH

$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{2a^2} \Rightarrow AH = a\sqrt{2}$

Vậy $d(A, (SCD)) = a\sqrt{2}$

b) Gọi E là hình chiếu của A lên BC, F là hình chiếu của A lên SE, ta có (xem Hình 185)

AE ⊥ CE (1), AF ⊥ SE (2)

Ta chứng minh AF ⊥ (SBC)

SA ⊥ (ABCD) ⇒ SA ⊥ CE (3)

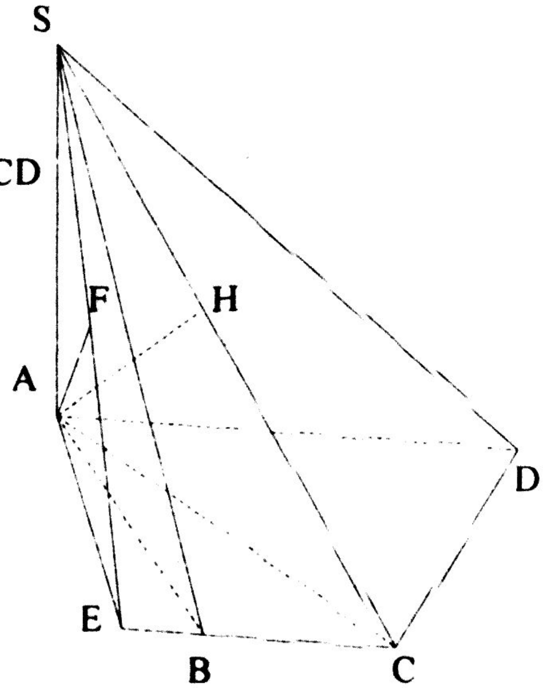
(1) và (3) ⇒ CE ⊥ (SAE) ⇒ CE ⊥ AF (4)

(2) và (4) ⇒ AF ⊥ (SBC)

Ta tính AB. Theo định lí Côsin:

$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC.AC.\cos\widehat{ACB}$

$= a^2 + 3a^2 - 2a.\sqrt{3}a.\cos\widehat{ACB}$ (5)



Hình 185

$\cos\widehat{ACB} = \cos\widehat{DAC} = \dfrac{AC}{AD} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (tam giác ACD vuông tại C) (6)

Thế vào (5): $AB^2 = 4a^2 - 3a^2 = a^2 \Rightarrow AB = a$

Cũng theo (6) $\angle ACB = 30^0 \Rightarrow \angle ABE = 60^0$

Tam giác vuông AEB cho ta:

$$AE = AB.\sin\widehat{ABE} = a.\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Tam giác SAE vuông tại A với đường cao AF cho ta:

$$\frac{1}{AF^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AE^2} = \frac{9}{6a^2} \Rightarrow AF = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

Vậy $d(AD, (SBC)) = d(A, (SBC)) = AF = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$

III. Dạng toán 3: Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

Phương pháp: Có thể sử dụng các cách sau để tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a, b

- Tính độ dài đoạn vuông góc chung
- Tính khoảng cách từ mặt phẳng chứa a và song song với b đến b
- Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song lần lượt chứa a và b

VD: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh 3a, cạnh bên SA = 4a và vuông góc với (ABCD). Tính khoảng cách giữa

a) SB và CD

b) AD và SC

c) BD và SC

Giải

a) $BC \perp AB \Rightarrow BC \perp SB$ (theo định lí ba đường vuông góc)

Lại do $BC \perp CD$

Vậy BC là đoạn vuông góc chung của SB và CD

$\Rightarrow d(SB, CD) = 3a$

b) Ta có $AD \,//\, BC \Rightarrow AD \,//\, (SBC)$

Vậy:

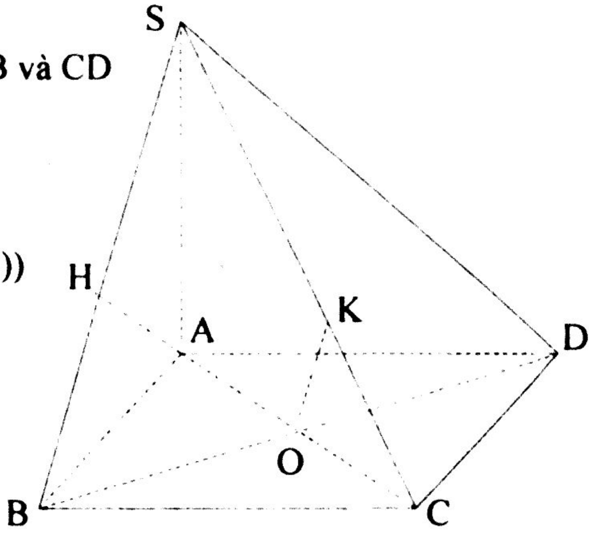
$d(AD, SC) = d(AD, (SBC)) = d(A, (SBC))$

Gọi H là hình chiếu của A lên SB (xem Hình 186), ta có

$AH \perp SB$ (1)

Vì $BC \perp AB \Rightarrow AH \perp BC$ (định lí ba đường vuông góc) (2)

(1) và (2) $\Rightarrow AH \perp (SBC)$



Hình 186

Tam giác SAB vuông tại A có đường cao AH
ta có

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{16a^2} + \frac{1}{9a^2} = \frac{25}{144a^2}$$

$$\Rightarrow AH = \frac{12a}{5}$$

Vậy $d(AD, SC) = AH = \frac{12a}{5}$

c) Hạ $OK \perp SC$

Vì $BD \perp AC$ (đường chéo của hình vuông) $\Rightarrow BD \perp OK$ (định lí ba đường vuông góc)

Vậy OK là đoạn vuông góc chung của BD và SC

Tam giác SAC vuông tại A ta có:

$$SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = \sqrt{16a^2 + 18a^2} = a\sqrt{34}$$

Hai tam giác vuông ASC và KOC đồng dạng ta có:

$$\frac{OK}{SA} = \frac{OC}{SC} \Rightarrow OK = \frac{SA.OC}{SC} = \frac{4a.a.\frac{\sqrt{18}}{2}}{a\sqrt{34}} = \frac{6a}{\sqrt{17}}$$

Vậy $d(BD, SC) = \frac{6a}{\sqrt{17}}$

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

(A) Đường vuông góc chung của hai đường thẳng a và b chéo nhau là một đường thẳng d vừa vuông góc với a vừa vuông góc với b

(B) Đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau là đoạn ngắn nhất trong các đoạn nối hai điểm bất kì lần lượt thuộc hai đường thẳng ấy

(C) Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b. Đường vuông góc chung luôn luôn nằm trong mặt phẳng vuông góc với a và chứa đường thẳng b

(D) Hai đường thẳng chéo nhau là hai đường thẳng không có điểm chung

Câu 2: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

(A) Khoảng cách giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) song song với a là khoảng cách từ một điểm A bất kì thuộc a tới mặt phẳng (P)

(B) Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b là khoảng cách từ một điểm M thuộc mặt phẳng (P) chứa a và song song với b đến một điểm N bất kì trên b

(C) Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song là khoảng cách từ một điểm M bất kì trên mặt phẳng này đến mặt phẳng kia

(D) Nếu hai đường thẳng a và b chéo nhau và vuông góc nhau thì đường thẳng vuông góc chung của chúng nằm trong mặt phẳng (P) chứa đường thẳng này và vuông góc với đường thẳng kia

Câu 3: Cho hình chóp tam giác S.ABC với SA vuông góc với (ABC) và SA = 3a. Diện tích tam giác ABC bằng $2a^2$. BC = a. Khoảng cách từ S đến BC bằng bao nhiêu?

(A) 2a **(B)** 3a **(C)** 4a **(D)** 5a

Câu 4: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, tâm O. Cạnh bên SA = a và vuông góc với đáy. Gọi I là trung điểm của SC, M là trung điểm của AB. Khoảng cách từ I đến CM bằng bao nhiêu?

(A) $a\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ **(B)** $\frac{2a}{\sqrt{5}}$ **(C)** $a\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}}$ **(D)** $a\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$

Câu 5: Cho tứ diện đều ABCD cạnh a. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (BCD) bằng bao nhiêu?

(A) 2a **(B)** $a\frac{\sqrt{6}}{2}$ **(C)** $a\frac{\sqrt{6}}{3}$ **(D)** 1,5a

Câu 6: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng a. Khoảng cách từ S đến (ABCD) bằng bao nhiêu?

(A) $\frac{a}{\sqrt{2}}$ **(B)** $\frac{a}{2}$ **(C)** $\frac{a}{\sqrt{3}}$ **(D)** a

Câu 7: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD, đáy ABCD có tâm O và cạnh bằng a. Cạnh bên bằng a. Khoảng cách từ O đến (SAD) bằng bao nhiêu?

(A) $\frac{a}{\sqrt{2}}$ **(B)** $\frac{a}{2}$ **(C)** $\frac{a}{\sqrt{6}}$ **(D)** a

Câu 8: Cho mặt phẳng (P) và điểm M ngoài (P) và khoảng cách từ M đến (P) bằng 6. Lấy A thuộc (P) và N trên đoạn AM sao cho 2MN = NA. Khoảng cách từ N đến (P) bằng bao nhiêu?

(A) 3 **(B)** 4 **(C)** 5 **(D)** 2

Câu 9: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD. Cạnh bên bằng cạnh đáy bằng a. Khoảng cách từ C đến (SAD) bằng bao nhiêu?

(A) $\frac{a}{\sqrt{2}}$ **(B)** $\frac{2a}{\sqrt{6}}$ **(C)** $\frac{a}{\sqrt{6}}$ **(D)** a

Câu 10: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$. Cạnh bên $AA_1 = 21$. ABC là tam giác vuông cân tại A, BC = 42. Khoảng cách từ A đến (A_1BC) bằng bao nhiêu?

(A) $\frac{21\sqrt{2}}{2}$ **(B)** $7\sqrt{2}$ **(C)** $\frac{21\sqrt{3}}{2}$ **(D)** 42

Câu 11: Cho góc $\widehat{xOy} = 90^0$ và một điểm M nằm ngoài mặt phẳng chứa góc xOy. Biết MO = 6. Khoảng cách từ M đến Ox và Oy bằng nhau và bằng $2\sqrt{5}$. Khoảng cách từ M đến (Ox, Oy) bằng bao nhiêu?

(A) 4 **(B)** $2\sqrt{2}$ **(C)** 2 **(D)** $2\sqrt{3}$

Câu 12: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD cạnh đáy bằng cạnh bên bằng a. Khoảng cách từ AD đến mặt phẳng (SBC) bằng bao nhiêu?

(A) $\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ (B) $\frac{a}{\sqrt{3}}$ (C) $\frac{2a}{\sqrt{3}}$ (D) 0,5a

Câu 13: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A_1B_1C_1$ có cạnh bên bằng a. Các cạnh bên của lăng trụ tạo với mặt đáy góc 60^0 và hình chiếu vuông góc của A lên $(A_1B_1C_1)$ là trung điểm của B_1C_1. Khoảng cách giữa hai mặt đáy của lăng trụ bằng bao nhiêu?

(A) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ (B) $\frac{a}{2}$ (C) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ (D) $\frac{a}{3}$

Câu 14: Cho hình tứ diện đều ABCD cạnh a. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD bằng bao nhiêu?

(A) $\frac{a}{\sqrt{2}}$ (B) $\frac{a}{\sqrt{3}}$ (C) $\frac{a}{2}$ (D) a

Câu 15: Cho hình tứ diện OABC, trong đó OA, OB, OC đôi một vuông góc nhau và OA = OB = OC = a. Khoảng cách giữa OA và BC bằng bao nhiêu?

(A) $\frac{a}{\sqrt{2}}$ (B) a (C) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ (D) $\frac{a}{2}$

Câu 16: Cho hình tứ diện OABC, trong đó OA, OB, OC đôi một vuông góc nhau và OA = OB = OC = a. Gọi I là trung điểm BC. Khoảng cách giữa AI và OC bằng bao nhiêu?

(A) $\frac{a}{\sqrt{5}}$ (B) a (C) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ (D) $\frac{a}{2}$

Câu 17: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B. BA = a. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và SA = $a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của AB. Khoảng cách giữa SM và BC bằng bao nhiêu?

(A) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ (B) $\frac{a\sqrt{2}}{3}$ (C) $\frac{a}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{2}a$

Câu 18: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có AB = SA = 2a. Khoảng cách từ đường thẳng AB đến (SCD) bằng bao nhiêu?

(A) $a\frac{\sqrt{6}}{3}$ (B) 0,5a (C) a (D) $a\frac{\sqrt{6}}{2}$

Câu 19: Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ cạnh bằng a. Trong các kết quả sau, kết quả nào đúng?

(A) Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (B_1BD) bằng $\frac{1}{3}a$

(**B**) $AC_1 = a\sqrt{2}$

(**C**) Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (CDC_1D_1) bằng $a\sqrt{2}$

(**D**) Khoảng cách từ AB đến B_1D bằng $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$

Câu 20: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có ba kích thước AB = a, AD = b, $AA_1 = c$. Trong các kết quả sau, kết quả nào sai?

(**A**) $BD_1 = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

(**B**) Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CC_1 bằng b

(**C**) Khoảng cách từ A đến (BB_1D) bằng $\dfrac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

(**D**) Khoảng cách từ A đến (BB_1D) bằng $\dfrac{abc}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

Câu 21: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có ba kích thước AB = a, AD = 2a, AA_1 = 3a. Khoảng cách từ A đến (A_1BD) bằng bao nhiêu?

(**A**) $\dfrac{6}{7}a$ (**B**) $\dfrac{5}{7}a$ (**C**) a (**D**) $\dfrac{7}{6}a$

Câu 22: Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có cạnh bằng a. Gọi M là trung điểm của AD. Khoảng cách từ A_1 đến (C_1D_1M) bằng bao nhiêu?

(**A**) 0,5a (**B**) $\dfrac{2}{\sqrt{6}}a$ (**C**) $\dfrac{2}{\sqrt{5}}a$ (**D**) a

Câu 23: Cho hình tứ diện OABC với OA, OB, OC vuông góc từng đôi và OA = OB = OC. Gọi I là trung điểm của BC, J là trung điểm của AI. Gọi K, L lần lượt là hình chiếu vuông góc của O lên AI, của J lên OC. Chọn khẳng định đúng

(**A**) Đoạn vuông góc chung của AI và OC là OK

(**B**) Đoạn vuông góc chung của AI và OC là IC

(**C**) Đoạn vuông góc chung của AJ và OC là JL

(**D**) Các khẳng định ở (A), (B), (C) đều sai

Câu 24: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông tâm O, SA vuông góc với (ABCD). Gọi K, H theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của A lên SD, của O lên SD. Chọn khẳng định đúng

(**A**) Đoạn vuông góc chung của AC và SD là đoạn AK

(**B**) Đoạn vuông góc chung của AC và SD là đoạn OH

(**C**) Đoạn vuông góc chung của AC và SD là đoạn CD

(**D**) Các khẳng định ở (A), (B), (C) đều sai

Câu 25: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có AA_1 = 2a, AD = 4a. Gọi M là trung điểm của AD. Khoảng cách giữa hai đường thẳng A_1B_1 và C_1M bằng bao nhiêu?

(**A**) $a\sqrt{2}$ (**B**) $2a\sqrt{2}$ (**C**) 2a (**D**) 3a

Câu 26: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông tâm O, SA vuông góc với (ABCD). Gọi K, H, M theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của B, O, D lên SC. Đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng SC và BD là đoạn thẳng nào dưới đây?

(A) BK **(B)** OH **(C)** DM **(D)** BS

Câu 27: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông tâm O cạnh bằng a. SA vuông góc với (ABCD) và SA = a. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và BD bằng bao nhiêu?

(A) $\frac{a}{\sqrt{6}}$ **(B)** $\frac{a}{\sqrt{5}}$ **(C)** 0,5a **(D)** $\frac{a}{\sqrt{7}}$

TRẢ LỜI

Câu 1:

(A) Khẳng định sai. Phát biểu đúng như sau: Đường vuông góc chung của hai đường thẳng a và b chéo nhau là một đường thẳng d vừa vuông góc với a vừa vuông góc với b và cùng cắt hai đường thẳng a, b

(B) Khẳng định đúng

(C) Khẳng định sai. Khẳng định chỉ đúng khi hai đường thẳng đã cho vuông góc

(D) Khẳng định sai. Phát biểu đúng như sau: Hai đường thẳng chéo nhau là hai đường thẳng không cùng thuộc một mặt phẳng

ĐS: (B)

Câu 2: (B)

Câu 3: (xem Hình 187)

Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên BC

Theo định lí ba đường vuông góc ta có $AH \perp BC$

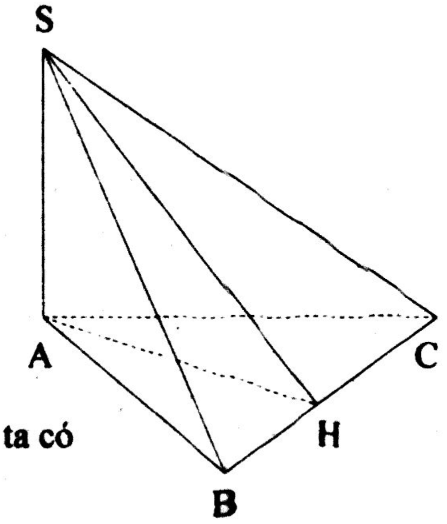
$$S(ABC) = \frac{1}{2}AH.BC = \frac{1}{2}a.AH$$

Hay: $2a^2 = \frac{1}{2}a.AH \Rightarrow AH = 4a$

Áp dụng định lí Pitagor vào tam giác vuông SAH ta có

$$SH = \sqrt{SA^2 + AH^2} = 5a$$

ĐS: (D)



Hình 187

Câu 4: (xem Hình 188)

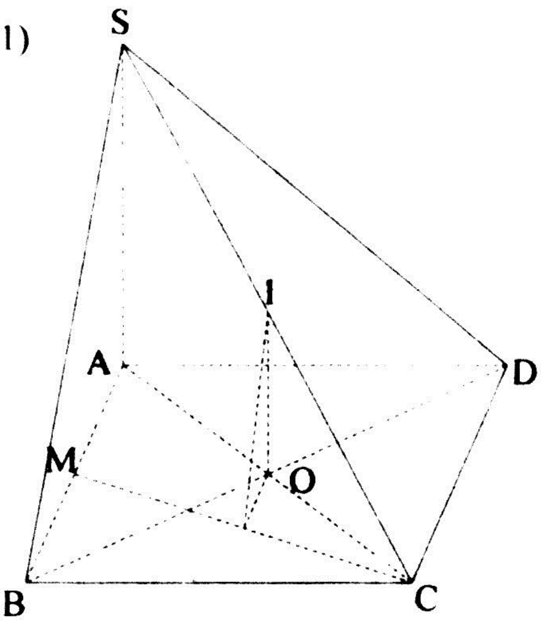
$IO \parallel SA \Rightarrow IO \perp (ABCD)$. $OI = \frac{SA}{2} = \frac{a}{2}$

Từ O kẻ $OH \perp CM$ thì $IH \perp CM$

Vậy IH là khoảng cách từ I đến CM

$$CM = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = a\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$S(OCM) = \frac{1}{2}S(ACM) = \frac{1}{2}\frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{8} \quad (1)$$



Hình 118

Vì $S(OCM) = \frac{1}{2}OH.CM$ (2)

(1) và (2) $\Rightarrow OH = \frac{a}{2\sqrt{5}}$

$$\Rightarrow IH = \sqrt{OI^2 + OH^2} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{10}}$$

ĐS: (C)

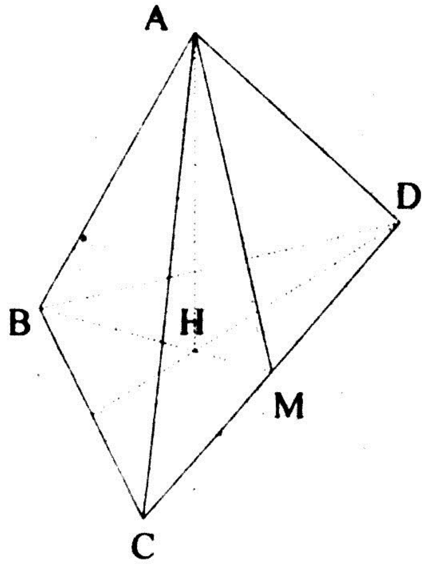
Câu 5: (xem Hình 189)

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên mp(BCD)

Khoảng cách từ A đến (BCD) là đoạn AH

Vì AB = AC = AD, nên HB = HC = HD, do đó H là tâm của tam giác đều BCD

$$BH = \frac{2}{3}BM = \frac{2}{3}.a.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$



Hình 118

Tam giác AHB vuông tại H, theo định lí Pitagor

$$AH^2 = AB^2 - BH^2 = a^2 - \frac{a^2}{3} = \frac{2a^2}{3}$$

Vậy $AH = a\frac{\sqrt{6}}{3}$

ĐS: (C)

Câu 6: (xem Hình 190)

Gọi O là tâm của hình vuông (giao của hai đường chéo) thì $SO \perp (ABCD)$

Và vì vậy khoảng cách từ S đến (ABCD) bằng SO

Tam giác SOA vuông tại O, theo định lí Pitagor ta có:

$$SO^2 = SA^2 - OA^2 = a^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2}$$

Vậy $SO = \frac{a}{\sqrt{2}}$

ĐS: (A)

Câu 7: Gọi M là trung điểm của AD (xem Hình 190)

H là hình chiếu của O lên SM. ta có $OH \perp SM$ (1)

Vì $AD \perp SM$, $AD \perp SO \Rightarrow AD \perp (SOM)$

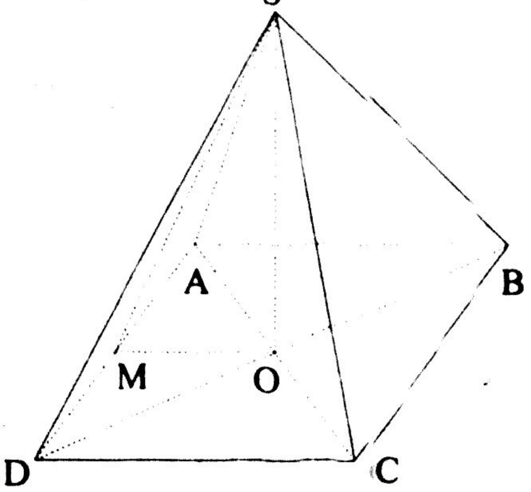
$\Rightarrow AD \perp OH$ (2)

(1) và (2) $\Rightarrow OH \perp (SAD)$

Ta có $OC = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$, $SC = a$.

Áp dụng địnhlí Pitagor cho tam giác vuông SOC ta có:

$$SO^2 = SC^2 - OC^2 = \frac{a^2}{2}$$



Hình 190

OH là đường cao của tam giác vuông SOM cho ta:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OM^2} + \frac{1}{SO^2} = \frac{4}{a^2} + \frac{2}{a^2} = \frac{6}{a^2}$$

$$\Rightarrow OH^2 = \frac{a^2}{6} \Rightarrow OH = \frac{a}{\sqrt{6}}$$

ĐS: (C)

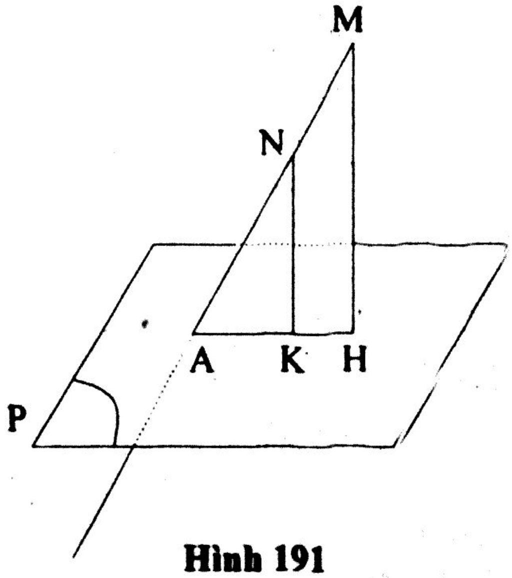
Câu 8: (xem Hình 191)

Gọi H và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M, N lên (P), dễ thấy K, H, A thẳng hàng

Theo định lí Talet ta có:

$$\frac{NK}{MH} = \frac{AN}{AM} = \frac{2MN}{2MN + MN} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow NK = 6.\frac{2}{3} = 4$$



Hình 191

ĐS: (B)

Câu 9: (bạn đọc tự vẽ hình)

Gọi O là tâm của ABCD, vì O là trung điểm của AC, nên ta tính đại lượng trung gian: khoảng cách từ O đến (SAD)

Dễ chứng minh rằng: $d(O, SAD) = \dfrac{a}{\sqrt{6}}$

Vậy $d(C, (SAD)) = \dfrac{2a}{\sqrt{6}}$

ĐS: (B)

Câu 10: (xem Hình 192)

Gọi M là trung điểm của BC, H là hình chiếu vuông góc của A lên A_1M, ta có $AH \perp AM$ (1)

$AA_1 \perp (ABC) \Rightarrow AA_1 \perp BC$

Vì ABC cân tại A nên $AM \perp BC$

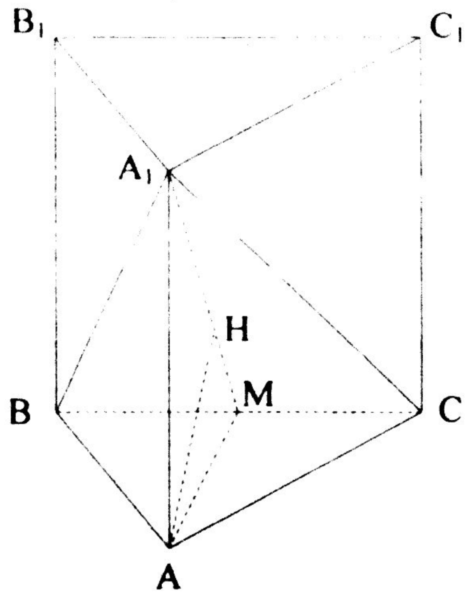
$\Rightarrow BC \perp (AA_1M) \Rightarrow BC \perp AH$ (2)

(1) và (2) $\Rightarrow AH \perp (A_1BC)$

$$AM = \frac{1}{2}BC = 21$$

$$A_1M = \sqrt{A_1A^2 + AM^2} = 21\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow AH = \frac{1}{2}A_1M = \frac{21\sqrt{2}}{2}$$



Hình 192

ĐS: (A)

Câu 11: (xem Hình 193)

Gọi H là hình chiếu vuông góc của M lên (Ox, Oy)

I, K là hình chiếu vuông góc của M lên Ox, Oy

Theo định lí ba đường vuông góc ta có:

$HI \perp Ox$, $HK \perp Oy$

Vậy OIHK là hình chữ nhật

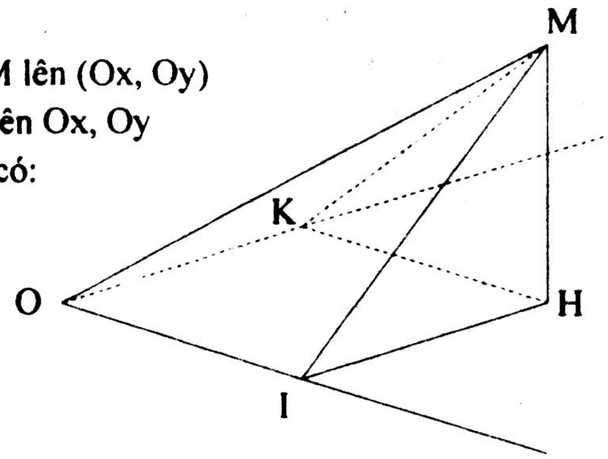
Lại do $\Delta MOI = \Delta MOK$(c–g–c)

$\Rightarrow OK = OI$

$\Rightarrow$ OIHK là hình vuông

$$OI = IH = \sqrt{MO^2 - MI^2} = 4$$

$$\Rightarrow MH = \sqrt{MI^2 - HI^2} = 2$$



Hình 193

ĐS: (C)

Câu 12: (xem Hình 194)

Gọi O là tâm của hình vuông ABCD, ta có

$SO \perp (ABCD)$

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, AD.

H là hình chiếu của N lên SM, ta có $NH \perp SM$

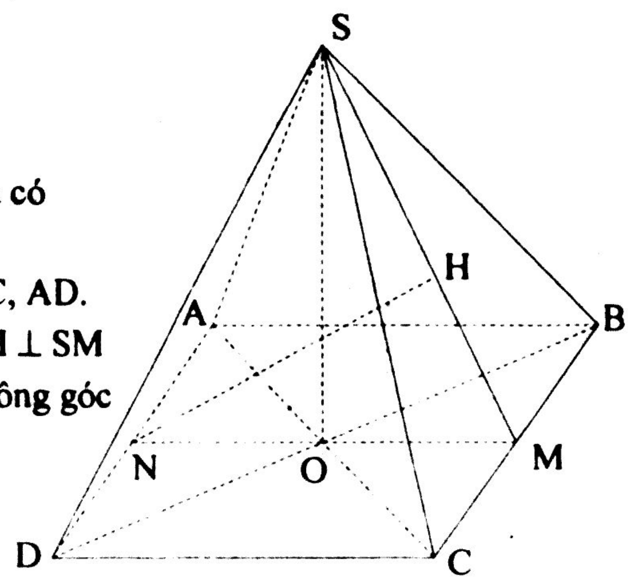
Vì $BC \perp MN$, theo định lí ba đường vuông góc

$NH \perp BC$

$\Rightarrow NH \perp (SBC)$

$d(AD, (SBC)) = d(N, (SBC)) = NH$

Ta tính NH bằng phương pháp diện tích



Hình 194

$$SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$MN = a$

$$SM = \sqrt{SC^2 - CM^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Ta có: $SO.MN = NH.SM \Leftrightarrow NH = \dfrac{SO.MN}{SM} = \dfrac{\frac{a\sqrt{2}}{2}.a}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

Vậy $d(AD, (SBC)) = \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

ĐS: (A)

Câu 13: (xem Hình 195)

Gọi H là trung điểm của B_1C_1, theo giả thiết

$AH \perp (A_1B_1C_1)$

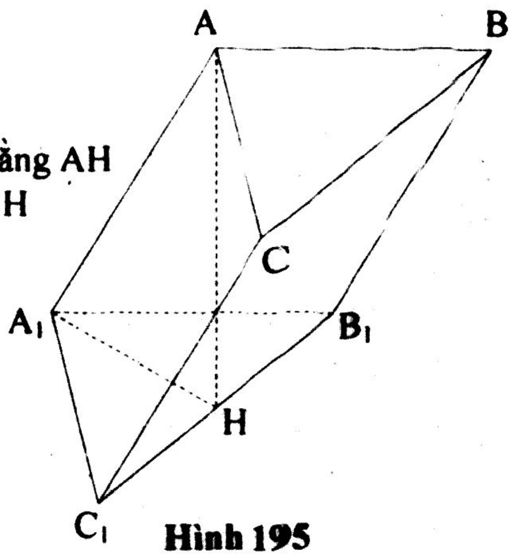
Khoảng cách giữa hai mặt đáy của lăng trụ bằng AH

Góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng góc AA_1H

A_1AH là tam giác vuông tại H nên

$$AH = A_1A\sin 60^0 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

ĐS: (A)



Hình 195

Câu 14:

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD (xem Hình 196)

ΔACD, ΔBCD là hai tam giác đều bằng nhau nên các trung tuyến tương ứng AN = BN

Tam giác ABN cân tại N có trung tuyến NM còn là đường cao nên $MN \perp AB$

Chứng minh tương tự $MN \perp CD$

Vậy MN là đoạn vuông góc chung của AB và CD

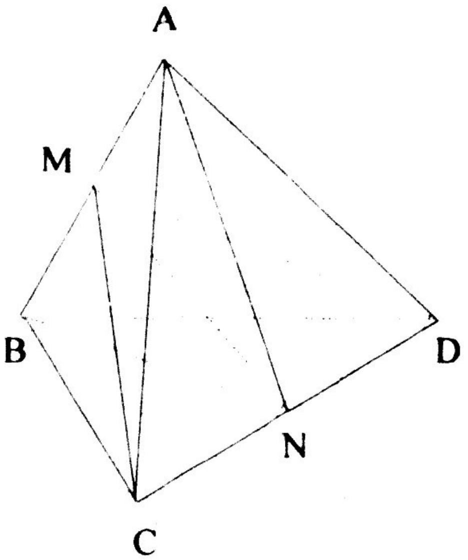
$$AM = \frac{a}{2}$$

$$AN = a\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ (đường cao của tam giác đều)}$$

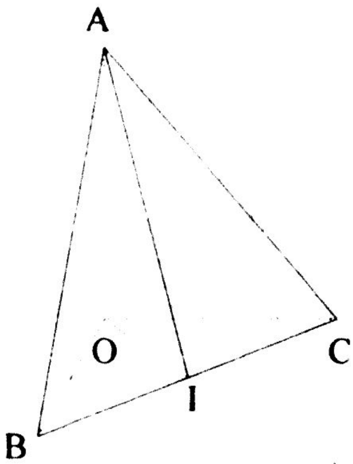
Áp dụng định lí Pitagor cho tam giác vuông AMN ta có:

$$MN^2 = AN^2 - AM^2 = \frac{a^2}{2} \Rightarrow MN = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

ĐS: (A)



Hình 196



Hình 197

Cu 15: (xem Hình 197)

Gọi I là trung điểm của BC. Tam giác cân OBC có trung tuyến còn là đường cao nên $OI \perp BC$

Mặt khác $OA \perp OB$, $OA \perp OC \Rightarrow OA \perp (OBC)$

$\Rightarrow OA \perp OI$

Vậy OI là đoạn vuông góc chung của OA và BC

Tam giác vuông cân có trung tuyến $OI = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$

ĐS: (A)

Cu 16: (xem Hình 198)

Gọi K là trung điểm của OB, ta có

$IK \parallel OC \Rightarrow OC \parallel (AIK)$

Vì vậy

$d(AI, OC) = d(OC, (AIK)) = d(O; (AIK))$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên AK, ta có $OH \perp AK$

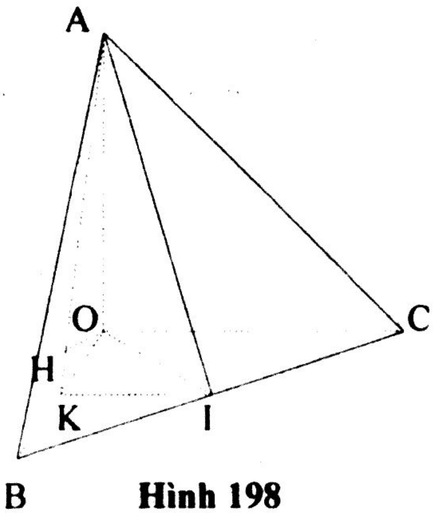
Vì $OC \perp (AOB)$, mà $IK \parallel OC$ nên $IK \perp (AOB)$

$\Rightarrow OH \perp IK$

Vậy $OH \perp (AIK)$

Tam giác vuông OAK có đường cao OH ta có:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OK^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{4}{a^2} = \frac{5}{a^2}$$



Hình 198

Vậy $OH = \dfrac{a}{\sqrt{5}}$

ĐS: (A)

Câu 17: (xem Hình 199)

$BC \perp AB \Rightarrow BC \perp SB$ (định lí ba đường vuông góc)

Vì vậy $BC \perp (SAB)$.

Từ B vẽ BH vuông góc với SM thì

$BH \perp BC$ và $BH \perp SM$

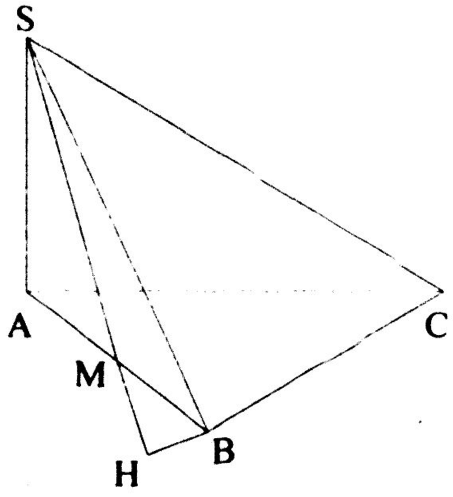
Vậy BH là đoạn vuông góc chung của SM và BC

Đặt $\widehat{ASM} = \varphi \Rightarrow \widehat{HBM} = \varphi$

Vì SAM là tam giác vuông nên

$$\tan\varphi = \frac{AM}{SA} = \frac{\frac{a}{2}}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\varphi}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$



Hình 199

Vì HBM vuông tại H nên $BH = MB.\cos\varphi = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$

ĐS: (B)

Câu 18: (xem Hình 200)

Gọi M là trung điểm của AB. O là tâm của ABCD, N là trung điểm của CD. Ta có:

$d(AB, (SCD)) = d(M, (SCD))$

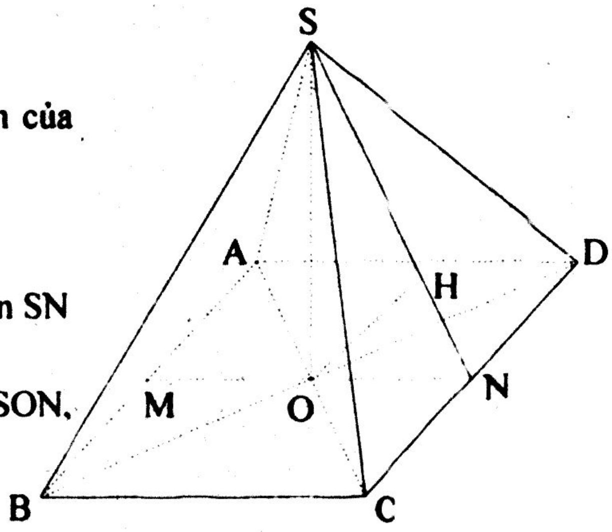
$= 2d(O; (SCD))$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên SN

Ta dễ dàng chứng minh $OH \perp (SCD)$

OH là đường cao của tam giác vuông SON, ta có:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{ON^2} + \frac{1}{SO^2}$$



Hình 200

$ON = a$

$SO^2 = SC^2 - OC^2 = 4a^2 - 2a^2 = 2a^2$

$$\Rightarrow \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{2a^2} = \frac{3}{2a^2} \Rightarrow OH^2 = \frac{2a^2}{3}$$

$$\Rightarrow OH = a\frac{\sqrt{6}}{3}$$

ĐS: (A)

Câu 19: (xem Hình 201)

(A) Dễ chứng minh rằng khoảng cách từ A đến mp B_1BD) bằng $AO = a\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Khẳng định (A) sai

(B) $AC_1 = a\sqrt{3}$, khẳng định (B) sai

(C) Khoảng cách từ A đến (CDC_1D_1) bằng AD = a khẳng định (C) sai.

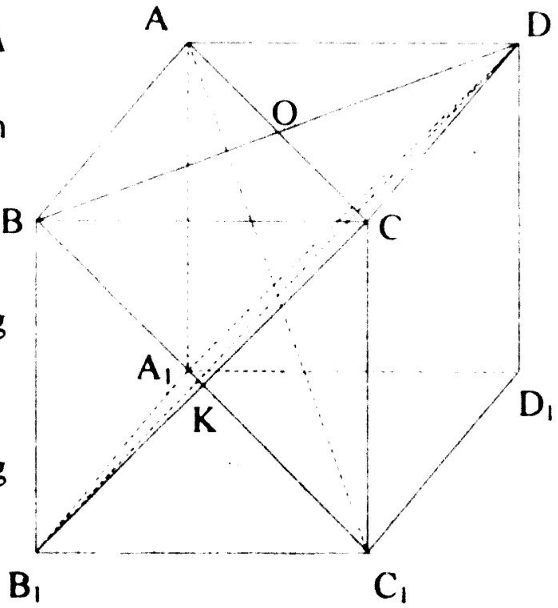
ĐS: (D)

Có thể chứng minh khẳng định (D) đúng như sau:

Vì AB // CD nên AB // (CDA_1B_1)

Lại do $B_1D \subset (CDA_1B_1)$, vì vậy

$$d(AB, B_1D) = d(AB, (CDA_1B_1))$$
$$= d(B, (CDA_1B_1))$$
$$= BK = \frac{a}{\sqrt{2}}$$



Hình 201

Câu 20 (xem Hình 202)

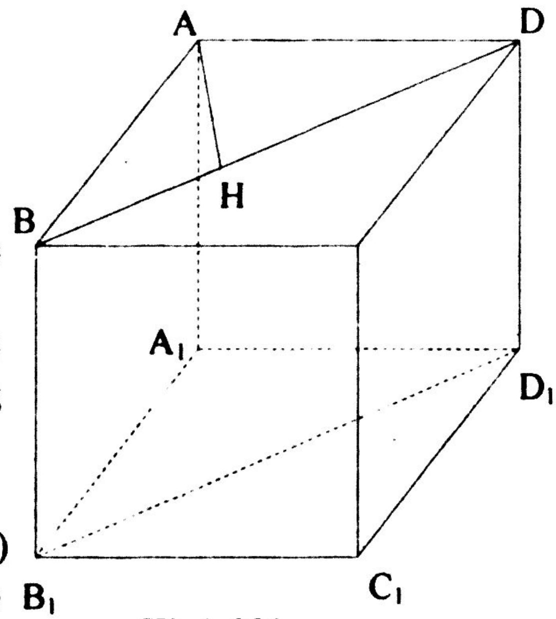
(A) Khẳng định (A) đúng, đây là công thức tính độ dài đường chéo của hình hộp chữ nhật

(B) Khoảng cách giữa AB và CC_1 bằng độ dài đoạn vuông góc chung BC = b. Khẳng định đúng

(C) Gọi H là hình chiếu của A lên BD

Dễ dàng chứng minh được $AH \perp (BB_1DD_1)$

Tam giác ABD vuông tại A với đường cao AH, ta có



Hình 202

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2b^2}$$

$$\Rightarrow AH = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Vậy $d(A, (BB_1DD_1)) = AH = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Khẳng định (C) đúng

ĐS: D)

Chú ý rằng, với cấu trúc câu trắc nghiệm này, ta chỉ cần tính $d(A, (BB_1DD_1))$

Câu 21: (xem Hình 203)

Gọi H là hình chiếu của A lên BD, K là hình chiếu vuông góc của A lên A_1H

Ta có: $BD \perp AH$ (1), $AK \perp A_1H$ (2)

Mặt khác: $BD \perp AA_1$ (do $AA_1 \perp (ABCD)$) (3)

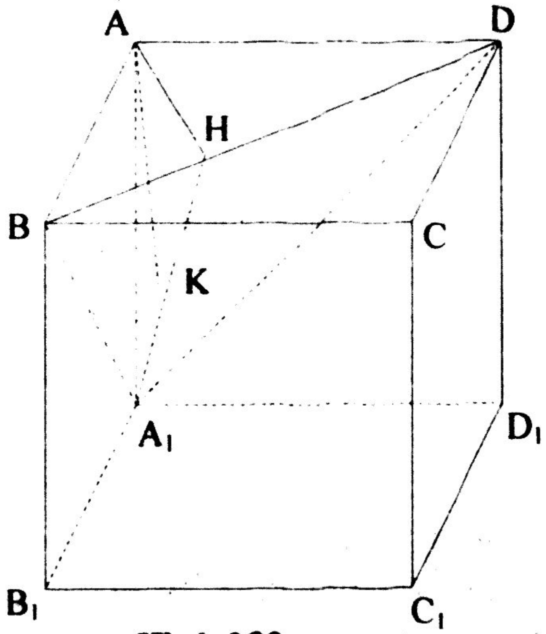
(1) và (3) $\Rightarrow BD \perp (AA_1H) \Rightarrow BD \perp AK$ (4)

(2) và (4) $\Rightarrow AK \perp (A_1BD)$

Tam giác ABD vuông tại A với đường cao AH ta có

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2}$$

$$= \frac{1}{a^2} + \frac{1}{4a^2} = \frac{5}{4a^2}$$



Hình 203

Tam giác A_1AH vuông tại A với đường cao AK ta có:

$$\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AH^2} + \frac{1}{A_1A^2}$$

$$= \frac{5}{4a^2} + \frac{1}{9a^2} = \frac{49}{36a^2}$$

$$\Rightarrow AK = \frac{6}{7}a$$

Vậy $d(A, A_1BD) = AK = \frac{6}{7}a$

ĐS: (A)

Câu 22: Gọi K là hình chiếu vuông góc từ A_1 lên D_1M, ta có $A_1K \perp D_1M$ (1) (xem Hình 204)

Vì $C_1D_1 \perp (ADA_1D_1) \Rightarrow C_1D_1 \perp A_1K$ (2)

(1) và (2) $\Rightarrow A_1K \perp (C_1D_1M)$

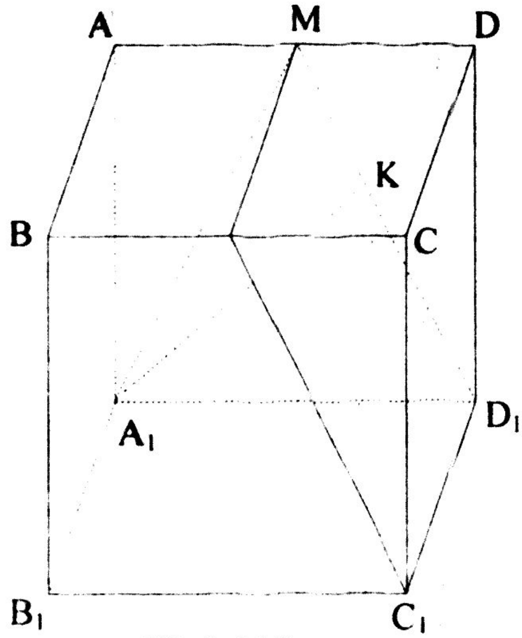
Để tính A_1K ta dùng phương pháp diện tích

$$S(A_1MD_1) = \frac{1}{2} A_1D_1 . AA_1$$

$$= \frac{1}{2} A_1K.MD_1 \ (*)$$

Ta có: $MD_1 = \sqrt{D_1D^2 + MD^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}$

$$= a\frac{\sqrt{5}}{2}$$

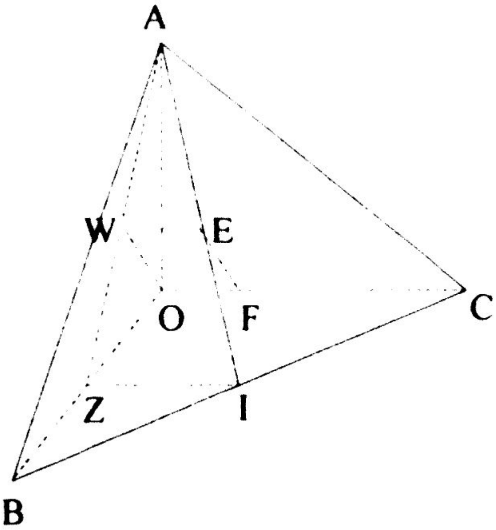


Hình 203

*) $\Leftrightarrow A_1K.a\dfrac{\sqrt{5}}{2} = a^2 \Leftrightarrow A_1K = a\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

Vậy $d(A_1, (C_1D_1M)) = A_1K = a\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

ĐS: (C)



Hình 205

Câu 23: (xem Hình 205)

Các khẳng định ở (A), (B), (C) là sai

Cách dựng đoạn vuông góc chung của AI và OC như sau

Ta có OC ⊥ (OAB). Từ I dựng đường thẳng song song với OC thì đường thẳng này vuông góc với (OAB) tại trung điểm Z của OB. Chiếu vuông góc O lên AZ là W.

Dựng WE // OC (E ∈ AI). Dựng F là hình chiếu vuông góc của E lên OC. EF là đoạn vuông góc chung của AI và OC

ĐS: (D)

Câu 24: (xem Hình 206)

Các khẳng định ở (A), (B), (C) đều sai

ĐS: (D)

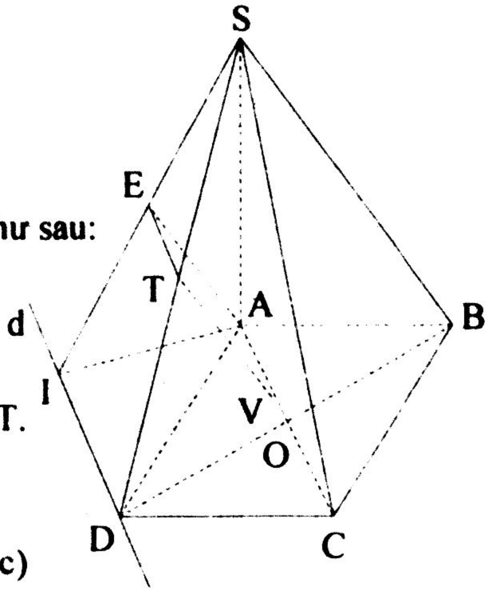
Ta dựng đoạn vuông góc chung của AC và SD như sau:

Từ D vẽ đường thẳng d song song với AC

Gọi I là hình chiếu vuông góc của A lên d, E là hình chiếu vuông góc của A lên SI.

Từ E vẽ đường thẳng song song với d cắt SD tại T.

Gọi V là hình chiếu vuông góc của T lên AC. VT là đoạn vuông góc chung của AC và SD. Thật vậy



Hình 206

Vì d ⊥ AI nên d ⊥ SI (định lí ba đường vuông góc)

⇒ d ⊥ (SAI) ⇒ d ⊥ AE

⇒ AE ⊥ ET và AE ⊥ AV

Theo cách dựng thì AV // ET và VT ⊥ AC

Vậy AETV là hình chữ nhật

⇒ AE // VT

Chú ý rằng AE ⊥ (SID) ⇒ AE ⊥ SD ⇒ VT ⊥ SD

Vậy VT là đoạn vuông góc chung của AC và SD

Câu 25: (xem Hình 207)

Dễ thấy A_1B_1 // (C_1D_1M)

⇒ $d(A_1B_1, C_1M) = d(A_1B_1, (C_1D_1M)) = d(A_1, (C_1D_1M))$

Gọi K là hình chiếu vuông góc của A_1 lên D_1M, ta có $A_1K \perp D_1M$ (1)

Vì $C_1D_1 \perp (ADA_1D_1) \Rightarrow C_1D_1 \perp A_1K$ (2)

(1) và (2) $\Rightarrow A_1K \perp (C_1D_1M)$

Ta tính A_1K bằng phương pháp diện tích

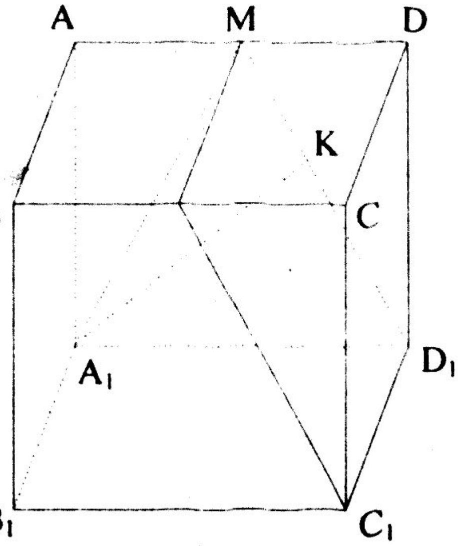
$S(MA_1D_1) = 0{,}5.AD.\ AA_1 = 4a^2$ (1)

$S(MA_1D_1) = 0{,}5.A_1K.MD_1$ (2)

$MD_1 = \sqrt{DM^2 + D_1D^2} = 2a\sqrt{2}$ (3)

(1), (2), (3) cho ta: $A_1K = 2a\sqrt{2}$

ĐS: (B)



Hình 207

Câu 26: (Bạn đọc tự vẽ hình)

Đoạn vuông góc chung cần tìm là đoạn OH

Thật vậy ta chỉ cần chứng minh $OH \perp BD$ (*)

Ta có: $SA \perp (ABCD) \Rightarrow BD \perp SA$ (1)

ABCD là hình vuông nên $BD \perp AC$ (2)

(1) và (2) $\Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp OH$

ĐS: (B)

Câu 27: Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên SC, ta có $OH \perp SC$ (*) (xem Hình 208)

$SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BD$ (1)

ABCD là hình vuông cho ta $BD \perp AC$ (2)

(1) và (2) $\Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp OH$ (**)

(*) và (**) suy ra OH là đoạn vuông góc chung của BD và SC

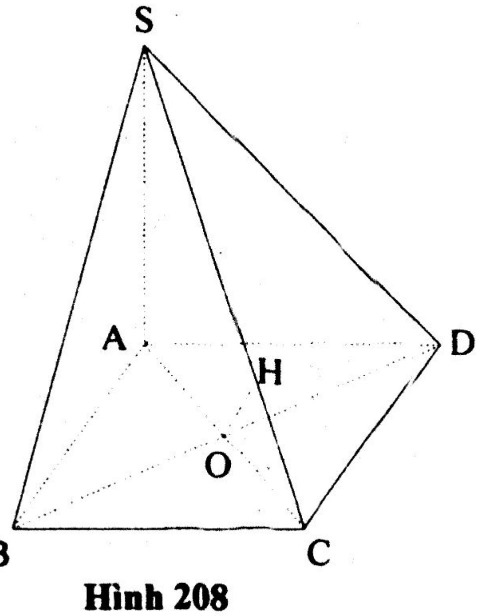
ΔSAC đồng dạng với ΔOHC (hai tam giác vuông có góc C chung), vì vậy

$$\frac{OH}{SA} = \frac{OC}{SC} \quad (3)$$

$$OC = a\frac{\sqrt{2}}{2};\ SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = a\sqrt{3}$$

Thế vào (3) ta có $OH = \dfrac{a}{\sqrt{6}}$

ĐS: (A)



Hình 208

MỤC LỤC

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội
Điện thoại: (04) 9724852. Fax: (04) 9714899

* * *

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc: PHÙNG QUỐC BẢO

Tổng biên tập: NGUYỄN BÁ THÀNH

Biên tập: HẢI ĐĂNG

Chế bản: Nhà sách HỒNG ÂN

Trình bày bìa: NGỌC ANH

Thực hiện liên kết: NHÀ SÁCH HỒNG ÂN

PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM HÌNH HỌC 11 (CHƯƠNG TRÌNH NÂNG CAO)

Mã số: 1L - 276ĐH2007. In 2.000 cuốn, khổ 16 × 24cm tại Công ti TNHH In Bao B
Phong Tân - TP. Hồ Chí Minh. Số xuất bản: 840-2007/CXB/21-130/ĐHQGHN
ngày 16/10/2007. Quyết định xuất bản số: 632 LK/XB. In xong và nộp lưu
chiểu quý IV năm 2007.